ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Βαρούχας Αλέξανδρος, Κεΐσογλου Στέφανος,

Λαγουδάκος Γεώργιος, Φερεντίνος Σπυρίδων

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γεωμετρία

Α΄ Λυκείου

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γεωμετρία

Α΄ Λυκείου

Επιστημονική Επιτροπή Αξιολόγησης

Συντονιστής / Αξιολογητής	**Γιαννουτάκης Κωνσταντίνος** Εν ενεργεία μέλος Διδακτικού Ερευνητικού Προσωπικού Πανεπιστημίου
Αξιολογητής	**Γραμματικόπουλος Δημήτριος** Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός
Αξιολογητής	**Κωστόπουλος Γεώργιος** Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός
Τεχνικός Εμπειρογνώμονας	**Λαλάς Χρήστος** Πτυχιούχος Πληροφορικής
Επικουρική Εμπειρογνώμονας	**Καλογεροπούλου Παρασκευή** Πτυχιούχος Γραφιστικής
Υπεύθυνη του μαθήματος/γνωστικού αντικειμένου στο πλαίσιο της Πράξης	**Ειρήνη Γεωργάκη**, Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ, μέλος της Επιστημονικής Ομάδας Έργου (ΕΟΕ) της Πράξης

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ 6010165 στο Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή» 2021-2027

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Σπυρίδων Δουκάκης

Πρόεδρος του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Υπεύθυνη Πράξης

Πολυξένη Μπίλλα

Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Προϊσταμένη Τμήματος Β΄ Προγραμμάτων Σπουδών και Εκπαιδευτικού Υλικού

Αναπληρώτρια Υπεύθυνη Πράξης

Άννα-Αικατερίνη Λυκούρη

Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

«Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης» και το Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή»

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Συγγραφική Ομάδα:

Βαρούχας Αλέξανδρος, Κεΐσογλου Στέφανος,

Λαγουδάκος Γεώργιος, Φερεντίνος Σπυρίδων

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γεωμετρία

Α΄ Λυκείου

Έκδοση

ΜΕΘΟΔΙΚΟ
Εκπαιδευτικός Οργανισμός

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Συγγραφική Ομάδα:
Βαρούχας Αλέξανδρος, Μαθηματικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης (MSc)
Λαγουδάκος Γεώργιος, Μαθηματικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης (MSc)

Επιστημονικοί Υπεύθυνοι:
Κεΐσογλου Στέφανος, τ. Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών (PhD)
Φερεντίνος Σπυρίδων, τ. Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών (PhD)

Εκπαιδευτική / Παιδαγωγική Ομάδα:
Βακαλόπουλος Κωνσταντίνος, Μαθηματικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης (MSc)
Βροντάκης Εμμανουήλ, Μαθηματικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης (PhD, MSc)
Μαυρομμάτης Άρης, Διδάσκων Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης (PhD, MSc)

Έκδοση: Εκδόσεις ΜΕΘΟΔΙΚΟ (www.methodiko.gr)

ΜΕΘΟΔΙΚΟ
Εκπαιδευτικός Οργανισμός

Επιμέλεια Ηλεκτρονικής Σελιδοποίησης & Εξωφύλλου:
Καίτη Αλεξοπούλου

Προλογοσ

Το βιβλίο αυτό είναι γραμμένο με βάση το πρόγραμμα σπουδών του 2023. Κάθε κεφάλαιο είναι χωρισμένο σε ενότητες και σε κάθε ενότητα υπάρχει μια ή περισσότερες δραστηριότητες οι οποίες αποτελούν αφετηρία για την διδασκαλία του μαθηματικού περιεχόμενου.

Οι δραστηριότητες αυτές υπηρετούν τους στόχους του μαθήματος οι οποίοι έχουν τον γενικό τίτλο «Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα» τα οποία πάντα αναφέρονται στην αρχή κάθε παραγράφου με τον τίτλο «Τι καινούριο υπάρχει στην ενότητα».

Σε κάθε ενότητα, πριν από τις δραστηριότητες, αναφέρονται οι απαραίτητες γνώσεις. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι κάθε δραστηριότητα εξυπηρετεί την ανακάλυψη του νέου αλλά και την ανάπτυξη δεξιοτήτων έρευνας, συνεργασίας, προβληματισμού, διατύπωσης εικασιών και αναστοχασμού.

Στα λυμένα παραδείγματα αποφεύγεται να δοθούν έτοιμες τεχνικές-μεθοδολογίες αλλά κατευθύνσεις. Ας μη ξεχνάμε άλλωστε ότι μέθοδος είναι η συνολική εμπειρία που αποκτά ο μαθητής όπου στην αρχή καλείται να μιμηθεί με στόχο να μπορέσει να ακολουθήσει τα δικά του μονοπάτια προς τη γνώση.

Έγινε προσπάθεια η γλώσσα των κειμένων να είναι απλή, δίνοντας όμως έμφαση στη σωστή χρήση της ορολογίας στην περιγραφή των Γεωμετρικών διαδικασιών. Η μέθοδος την οποία ακολουθούν οι συγγραφείς είναι επαγωγική – ανακαλυπτική.

Εμβόλιμα στο κείμενο για την υποστήριξη της διδασκαλίας υπάρχει ένας ικανός αριθμός εφαρμογών GeoGebra οι οποίες δίνουν τη δυνατότητα στο μαθητή να διερευνήσει δυναμικά το πρόβλημα που εξετάζει. Η τεχνολογία εντάσσεται στην στρατηγική ανάπτυξης κουλτούρας έρευνας και αναζήτησης. Παράλληλα με την παρουσίαση του μαθήματος, παρατίθεται ένα αρκετά πλούσιο υλικό ιστορίας των μαθηματικών, πλήρως ενταγμένο κάθε φορά στο αντικείμενο που πραγματευόμαστε.

Στο τέλος υπάρχει η Ανακεφαλαίωση, Φύλλο Αξιολόγησης και Εργασίες που μπορούν να γίνουν ομαδικά ή ατομικά.

Το βιβλίο γενικά στοχεύει να εμπλέξει τους μαθητές σε συστηματική εργασία ώστε να αναπτύξουν μία ιδιαίτερα σημαντική νοητική ικανότητα, τη Γεωμετρική. Θα πρέπει όμως να έχουμε κατά νου αυτό που απάντησε ο Ευκλείδης στον φαραώ της Αιγύπτου Πτολεμαίο όταν αυτός απαίτησε από τον μεγάλο μαθηματικό να μάθει γρήγορα – εύκολα και απλά, όπως αρμόζει σε ένα βασιλιά, την Γεωμετρία:

«Μή εἶναι βασιλικήν ἀτραπόν ἐπί γεωμετρίαν»

δηλαδή δεν υπάρχει βασιλική οδός για την Γεωμετρία!

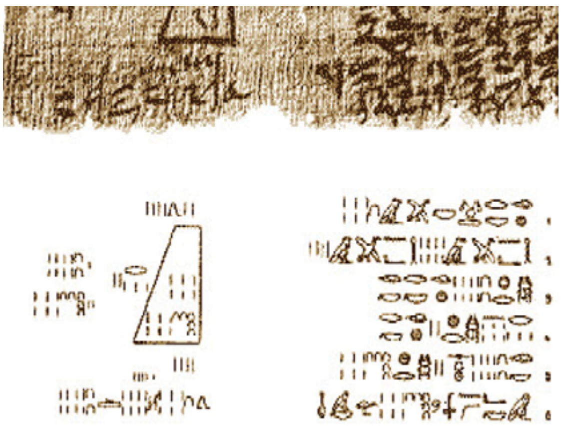
Στη κατεύθυνση αυτή ισχυριζόμαστε ότι:

«τα μαθηματικά είναι το μάθημα που μαθαίνει τον μαθητή πως να μαθαίνει»!

Περιεχομενα

Εισαγωγή

Ας αφήσουμε τον χρόνο να κυλίσει και ας βρεθούμε σε τόπους μαγικούς και χρόνους μυθικούς, εκεί όπου η Γεωμετρία δεν ήταν τίποτε άλλο παρά μια πρακτική τέχνη. Στις εύφορες κοιλάδες του Τίγρη και Ευφράτη, αλλά και του Νείλου οι πλημμύρες ήταν συχνό φαινόμενο. Έπρεπε, λοιπόν, να βρεθούν πρακτικοί τρόποι, ώστε τα κτήματα που προέκυπταν από τους συχνούς αναδασμούς στα πλημμυρισμένα χωράφια να έχουν πάντα το ίδιο εμβαδόν. Ήταν η περίοδος της **Πρακτικής Γεωμετρίας**. Αργότερα, στον ευρύτερο ελλαδικό χώρο που περιλαμβάνει την Ελλάδα και τα παράλια της Μικράς Ασίας, η Γεωμετρία μετεξελίσσεται σε επιστήμη. Οι Αρχαίοι Έλληνες είναι οι πρώτοι που θέτουν το ερώτημα, γιατί να ισχύει κάτι που εμπειρικά έχουμε καταλάβει ότι ισχύει; Είναι η εποχή της **Αποδεικτικής Γεωμετρίας**.



Τότε τίθενται και οι βασικοί κανόνες για το τι σημαίνει απόδειξη και θεμελιώνεται η επιστημονική μέθοδος. Βρισκόμαστε στις αρχές του 5ου αιώνα π.Χ. Εκείνη την εποχή μεγαλουργούν στον χώρο του Αιγαίου φιλόσοφοι, και δημιουργούν σχολές, κάτι σαν τα σύγχρονα πανεπιστήμια. Τα μαθηματικά, η μουσική, η φιλοσοφία, η ρητορική δεν είναι δραστηριότητες ασύνδετες μεταξύ τους, αλλά μία ολότητα, που έχει σκοπό τη διδασκαλία του μέτρου και της αρετής.

Αλλά, γιατί στον χώρο αυτό να αναπτυχθούν τα Μαθηματικά;

Γιατί οι Έλληνες αγαπούν τη συζήτηση!

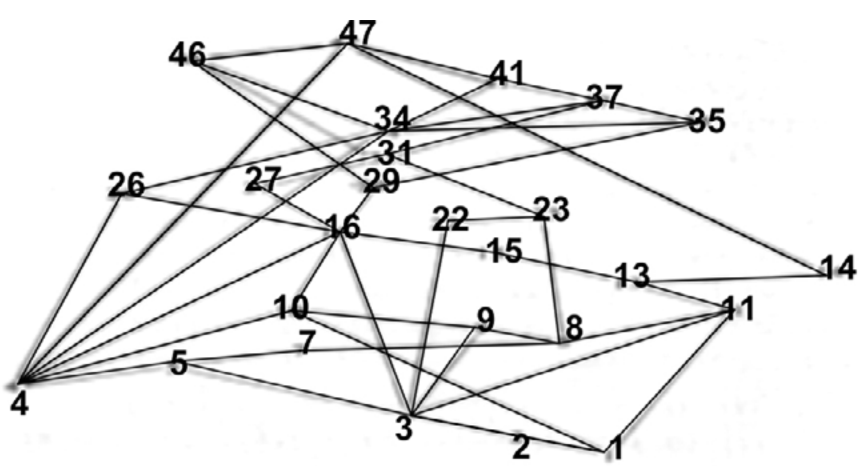
«Πράγματι ο Θαλής, ο Πυθαγόρας, ο Ιπποκράτης ο Χίος, ο Δημόκριτος, ο Θεαίτητος, ο Αρχύτας ο Ταραντινός, και τόσοι άλλοι Έλληνες στοχαστές που διαμόρφωσαν τα Μαθηματικά που γνωρίζουμε σήμερα δεν ήταν ούτε σκλάβοι ούτε κρατικοί υπάλληλοι. Στην Ελλάδα του τότε δεν υπάρχει ούτε βασιλιάς ούτε μέγας ιερέας για να αποφασίζει τη φύση της δουλειάς τους ή να βάζει όρια στις μελέτες τους. Οι Έλληνες διανοητές είναι ελεύθεροι άνθρωποι. Αλλά […] οφείλουν να υπερασπιστούν την άποψή τους μπροστά σε συναδέλφους τους. [….] Στην Αθήνα γινόντουσαν συνελεύσεις 7.000-8.000 ατόμων και καθένας με τη σειρά του μπορούσε να πάρει το λόγο. Δυναμικά επιχειρήματα διασταυρώνονταν για να καταφέρουν να κερδίσουν τη συναίνεση και τελικά την πλειοψηφία. […] Οι Έλληνες φιλόσοφοι, πολιτικοί και νομικοί διέπρεπαν στην τέχνη της πειθούς, αλλά η πρακτική τους είχε κάποια όρια. Η πειθώ δεν απαλείφει οριστικά την αμφιβολία. ***Τα Μαθηματικά απαιτούν, λοιπόν, κάτι περισσότερο από την απλή πειθώ. Ζητούν το αναμφισβήτητο.*** *Οι Έλληνες μαθηματικοί θέλουν να πείσουν με τέτοιον τρόπο, που κανείς να μην μπορεί να αμφισβητήσει τα συμπεράσματά τους και να μπορούν ανά πάσα στιγμή να άρουν οποιαδήποτε αμφιβολία για τους ισχυρισμούς τους.* ***Θέλουν λοιπόν αποδείξεις****».*

Από το βιβλίο του Ντένι Γκετζ *«Το Θεώρημα του παπαγάλου»*, Εκδόσεις Πόλις

Στα χρόνια μετά τον Μέγα Αλέξανδρο το κέντρο της γνώσης μετατοπίζεται και πάλι προς την Αίγυπτο. Τότε συναντάμε τον **Ευκλείδη** που κάνει κάτι το εκπληκτικό. Συγκεντρώνει όλη τη Γεωμετρική γνώση και συγγράφει 13 βιβλία Γεωμετρίας, που λέγονται «**Στοιχεία**».
Ο τρόπος που έγραψε το βιβλίο αυτό είναι ο ίδιος που μέχρι σήμερα θεωρείται ως ο ιδανικός τρόπος συγγραφής οποιουδήποτε επιστημονικού έργου. Αρχικά, έδινε τους **όρους** (ορισμούς). Μετά τον απολύτως αναγκαίο αριθμό αξιωμάτων (**αιτήματα**), μετά τις λεγόμενες **κοινές έννοιες** αναπόδεικτες ως προφανείς προτάσεις και ακολούθως προτάσεις που αποδεικνύονται από τα προηγούμενα. Τα λεγόμενα **θεωρήματα,** αλλά και άμεσες συνέπειες των θεωρημάτων τα λεγόμενα **πορίσματα**. Την αποδεικτική διαδικασία την τελείωνε με τις περίφημες εκφράσεις του: **ὅπερ ἔδει ποιῆσαι,** όταν επρόκειτο για κατασκευή, ή **ὅπερ ἔδει δεῖξαι**, όταν επρόκειτο για απόδειξη, δηλώνοντας την επιτυχή κατάληξη της προσπάθειάς του.

Έτσι διαμορφώθηκε η **Αξιωματική Γεωμετρία**.

Το διπλανό σχήμα δείχνει τον τρόπο της αποδεικτικής διαδικασίας, που χρησιμοποιείται στα Στοιχεία του Ευκλείδη.
Οι αριθμοί δηλώνουν την αρίθμηση των προτάσεων από το βιβλίο Ι των Στοιχείων με σκοπό να αποδειχθεί τελικά η 47η πρόταση, το περίφημο πυθαγόρειο θεώρημα.



Από το «The Greek Concept of proof» σειρά MA290:
Topics in the history of Mathematics, του ανοικτού Αγγλικού Πανεπιστημίου.

Οι σχολιαστές και οι εκδόσεις των «Στοιχείων»

Τα «Στοιχεία» λέγεται ότι έχουν εκδοθεί πάνω από χίλιες φορές. Το κείμενο, όμως, που έχουμε σήμερα δεν είναι το ίδιο με αυτό που συνέγραψε ο Ευκλείδης. Όλες οι εκδόσεις βασίζονται σε μία επανέκδοση που έκανε ο **Θεωνάς**, Έλληνας σχολιαστής που έζησε το 400 μ.Χ. περίπου. Οι πρώτες μεταφράσεις των 13 βιβλίων στα Λατινικά έγιναν από τα Αραβικά, αφού οι Άραβες διέσωσαν πλήθος χειρόγραφων μεταφράζοντάς τα στη γλώσσα τους.

Το 1120 ο Άγγλος μελετητής και μεταφραστής **Adelhard του Bath** τα μεταφράζει από τα αραβικά στα λατινικά χρησιμοποιώντας παλαιότερο αραβικό κείμενο. Ο **Johannes Campanus** το 1260 τα μεταφράζει στα Λατινικά, η μετάφραση αυτή χρησιμοποιείται για να πρωτοεκδοθούν τα Στοιχεία το 1482 στην Βενετία. Στα Ελληνικά τυπώνεται το κείμενο το 1533 από τον **S. Crynaeus** στην Βασιλεία της Ελβετίας. Ο Γάλλος μαθηματικός **Adrien Marie Legendre**, (1752 - 1833) το 1794 συγγράφει το **«Éléments de géométrie» (Στοιχεία γεωμετρίας)**. Σε αυτό απλοποιεί πολλές από τις προτάσεις των «Στοιχείων» και δημιουργεί ένα χρηστικό εγχειρίδιο Γεωμετρίας, το οποίο για τα επόμενα χρόνια θα αποτελέσει το βασικό βιβλίο Γεωμετρίας.

Στον ελλαδικό χώρο ο **Μεθόδιος ο Ανθρακίτης** περιλαμβάνει το πλήρες αρχαίο κείμενο στο έργο του «**Οδός της μαθηματικής**» που τυπώνεται στη Βενετία το 1749. Μετά παρουσιάζεται η μετάφραση από τα Λατινικά του **Ευγένιου Βούλγαρη** (1716-1806), ενώ ο **Βενιαμίν ο Λέσβιος** εκδίδει στη Βιέννη τα «Στοιχεία» το 1824. Το 1952 ο **Ε. Σταμάτης** επανεκδίδει τα «Στοιχεία» και διανέμονται ως διδακτικό βιβλίο στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Το 2001 τα «Στοιχεία» εκδίδονται σε τρεις τόμους από το **κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης**.

Στο βιβλίο που κρατάτε θα γνωρίσουμε την αποδεικτική Γεωμετρία, θα ασχοληθούμε με τις ιδιότητες βασικών γεωμετρικών σχημάτων και με την επίλυση προβλημάτων καθημερινής ζωής.

Θα εξετάσουμε τη Γεωμετρία ως ένα μάθημα που μας κάνει να κατανοήσουμε την ανάγκη να δικαιολογούμε την κάθε πρότασή μας, αφού η έκφραση «μα φαίνεται…» δεν είναι αρκετή, όταν ασχολείσαι με την επιστήμη.

Οι πρωταγωνιστές συστήνονται

Στις επόμενες σελίδες θα αναφερθούμε σε μια σειρά από γεωμετρικές μορφές, άλλες γνωστές και άλλες νέες. Ας θυμηθούμε τις γνωστές και ας δώσουμε λίγο χώρο για να μας συστηθούν οι πρωταγωνιστές του συναρπαστικού ταξιδιού στον κόσμο των σχημάτων.

Α. Σημείο, ευθεία και επίπεδο. (Σχ.1)

Αρχίζουμε με τις έννοιες **σημείο**, **ευθεία** και **επίπεδο** τις οποίες προσεγγίζουμε καθαρά διαισθητικά.
Θα δεχθούμε ότι:

- **από δύο σημεία ορίζεται μία μόνο ευθεία**,
- **από ένα σημείο διέρχονται άπειρες ευθείες**.

Σχήμα 1

Ή όπως απαιτεί ο Ευκλείδης:

Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Όταν σχεδιάζουμε μία ευθεία την ονομάζουμε είτε με ένα μικρό γράμμα για παράδειγμα ε ή με τη βοήθεια δύο γραμμάτων για παράδειγμα x΄x.

Μία ευθεία ε του επιπέδου το χωρίζει σε δύο μέρη Π_1, Π_2. Κάθε ένα από αυτά μαζί με την ευθεία λέγεται **ημιεπίπεδο**. Το κάθε ημιεπίπεδο καθορίζεται από την ευθεία ε και ένα σημείο του. (Σχ.2) Για παράδειγμα, το ημιεπίπεδο Π_1 στο διπλανό σχήμα ορίζεται από την ε και το σημείο Α και το συμβολίζουμε (ε, Α).

Σχήμα 2

Β. Ημιευθεία – ευθύγραμμο τμήμα – μέσο τμήματος. (Σχ.3)

Σχεδιάζουμε μία ευθεία x΄x και θεωρούμε ένα οποιοδήποτε σημείο της Α. Το σημείο αυτό χωρίζει την ευθεία σε δύο μέρη τα Ax και Ax΄ τα οποία λέγονται **ημιευθείες**. Οι ημιευθείες αυτές λέγονται **αντικείμενες** ημιευθείες. Ας σημειώσουμε και ένα άλλο σημείο Β, τότε το κομμάτι ΑΒ της ευθείας το ονομάζουμε **ευθύγραμμο τμήμα** ΑΒ.

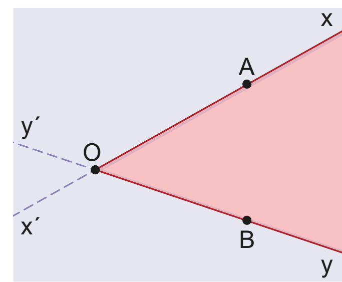
Σχήμα 3

Τα σημεία Α και Β λέγονται **άκρα** του ευθυγράμμου τμήματος και η ευθεία x΄x **φορέας** του ευθυγράμμου τμήματος. Κάθε σημείο μεταξύ των Α και Β λέγεται **εσωτερικό σημείο** του ΑΒ.

Η **απόσταση των σημείων** Α και Β λέγεται **μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ** και συμβολίζεται με (ΑΒ) ή απλούστερα ΑΒ. Στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ υπάρχει μοναδικό σημείο Μ εσωτερικό του τέτοιο ώστε ΑΜ = ΜΒ. Το σημείο Μ λέγεται **μέσο** του ΑΒ.

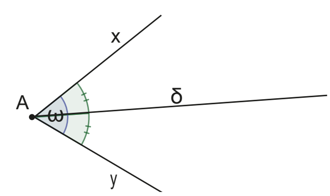
Γ. Γωνία – διχοτόμος γωνίας

Έστω δύο ευθείες x΄x και y΄y που τέμνονται στο σημείο Ο. Στις ημιευθείες Οx και Οy θεωρούμε τα σημεία Α,Β αντίστοιχα. Το σχήμα που αποτελείται από τα κοινά σημεία των ημιεπιπέδων (x΄x,B) και (y΄y ,A) λέγεται **κυρτή γωνία** με **κορυφή** O και **πλευρές** Οx και Οy. (Σχ.4) Τα σημεία του επιπέδου που δεν ανήκουν στην κυρτή γωνία, μαζί με τις ημιευθείες Οx και Οy λέγονται **μη κυρτή γωνία**.



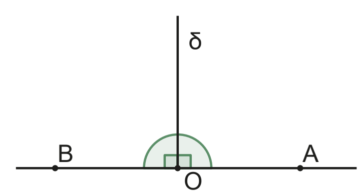
Σχήμα 4

- Η μοναδική ημιευθεία Αδ που χωρίζει μία γωνία σε δύο ίσες γωνίες λέγεται **διχοτόμος** της γωνίας (Σχ.5)
- Δύο αντικείμενες ημιευθείες λέμε ότι σχηματίζουν **μία ευθεία γωνία**.



Σχήμα 5

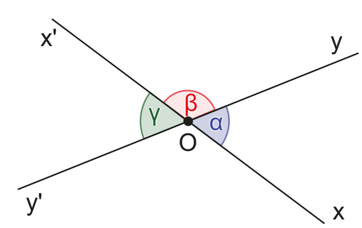
- Η διχοτόμος μιας ευθείας γωνίας την χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες, όπου η κάθε μία ονομάζεται **ορθή γωνία** (Σχ.6)
- Μία γωνία μικρότερη της ορθής λέγεται **οξεία** γωνία, ενώ μία γωνία μεγαλύτερη της ορθής και μικρότερη της ευθείας λέγεται **αμβλεία**.



Σχήμα 6

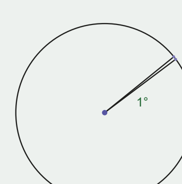
- **Κατακορυφήν γωνίες**, λέγονται οι γωνίες που έχουν κοινή κορυφή, και οι πλευρές της μιας είναι αντικείμενες ημιευθείες των πλευρών της άλλης. (Σχ.7)

  Ας θυμηθούμε ότι **δύο κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες**, διότι ($\alpha+\beta=180^\circ$ και $\beta+\gamma=180^\circ$, άρα $\alpha=\gamma$).

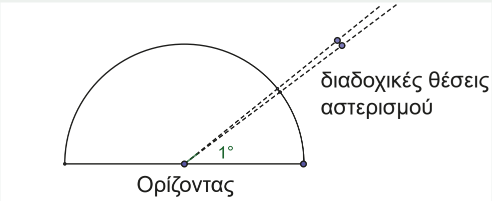


Σχήμα 7

Στο Γυμνάσιο μετρούσαμε τις γωνίες σε **μοίρες**. Ως μία μοίρα είχαμε ορίσει την **επίκεντρη γωνία** που βαίνει σε **τόξο** ίσο με το $\frac{1}{360}$ του κύκλου και την συμβολίσαμε 1°.



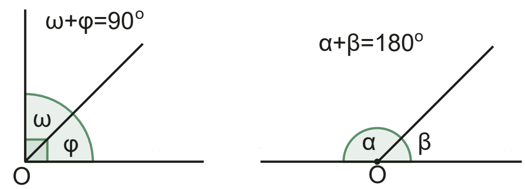
Λέγεται ότι ο χωρισμός του κύκλου σε 360 ίσα μέρη έχει την αιτία του σε αστρονομετρικές παρατηρήσεις.
Οι Σουμέριοι αστρονόμοι διαπίστωσαν ότι κάποιοι αστερισμοί εμφανίζονταν σε διαφορετικές θέσεις κατά τη διάρκεια ενός έτους.



Υπήρχαν αστερισμοί που κάθε μέρα ανέτειλαν (εμφανίζονταν, όταν έπεφτε το σκοτάδι και άρα ήταν ορατοί) με διαφορετική γωνία μέρα με τη μέρα. Συγχρόνως, η περιοδικότητα των διαδοχικών θέσεων τους στον ορίζοντα ήταν περίπου 360 μερόνυχτα. Η γωνία της φαινομενικής ανύψωσης στη διάρκεια μιας μέρας ενός αστερισμού ονομάστηκε μία μοίρα.

Δύο γωνίες λέγονται:

- **Συμπληρωματικές** όταν έχουν άθροισμα μία ορθή γωνία.
- **Παραπληρωματικές** όταν έχουν άθροισμα μία ευθεία γωνία. (Σχ.8)



Σχήμα 8

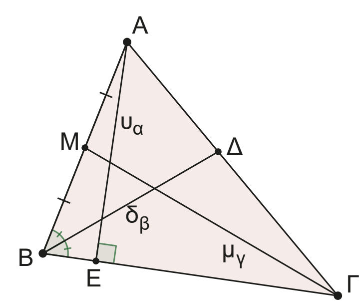
Δ. Τρίγωνο – βασικά στοιχεία ενός τριγώνου – είδη τριγώνων

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ως **κύρια στοιχεία** θεωρούμε **τις γωνίες του** και **τις πλευρές του**.

Τις πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις κορυφές Α. Β, Γ τις συμβολίζουμε α, β και γ αντίστοιχα, ενώ τις γωνίες του $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$.

Το άθροισμα των τριών πλευρών του λέγεται **περίμετρος** του τριγώνου και συμβολίζεται με 2τ, δηλαδή, $\alpha + \beta + \gamma = 2\tau$.

Δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου λέμε τις **διαμέσους**, τα **ύψη** και τις **διχοτόμους** του. (Σχ.9) Θυμίζουμε ότι:



Σχήμα 9

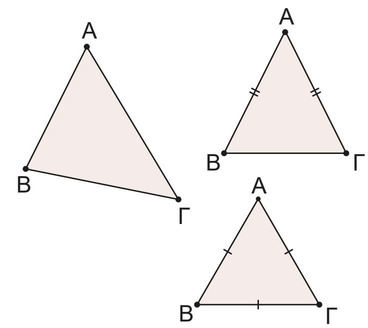
- **Διάμεσος** είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μία κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς. Στο διπλανό σχήμα έχει φέρει την διάμεσο ΓΜ.
- **Διχοτόμος** είναι το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου μιας γωνίας από την **κορυφή** μέχρι την απέναντι πλευρά. Στο διπλανό σχήμα έχουμε φέρει τη διχοτόμο ΒΔ.
- **Ύψος** είναι το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που **άγεται** από μία κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς. Στο διπλανό σχήμα έχουμε φέρει το ύψος ΑΕ.

Ο τρόπος με τον οποίο συμβολίζουμε τα μεγέθη αυτά είναι $\mu_\alpha, \mu_\beta, \mu_\gamma$ για τις διαμέσους που **άγονται** από τις **κορυφές** Α, Β, Γ αντίστοιχα, $\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma$ για τις διχοτόμους των γωνιών $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$ και $\upsilon_\alpha, \upsilon_\beta, \upsilon_\gamma$ για τα ύψη που άγονται από τις κορυφές Α, Β, Γ αντίστοιχα.

Ένα τρίγωνο το διακρίνουμε:

Ανάλογα με τις πλευρές του σε:

- **σκαληνό** όταν όλες οι πλευρές είναι άνισες,
- **ισοσκελές** όταν δύο πλευρές του είναι ίσες,
- **ισόπλευρο** όταν όλες οι πλευρές του είναι ίσες. (Σχ.10)

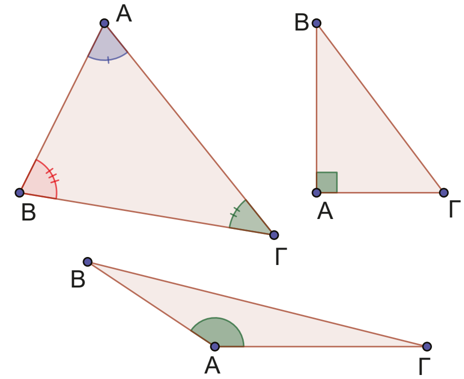


Σχήμα 10

Ανάλογα με τις γωνίες του σε:

- **οξυγώνιο** όταν όλες οι γωνίες του είναι οξείες,
- **ορθογώνιο** όταν μία γωνία του είναι ορθή.

  Η πλευρά που είναι απέναντι από την ορθή γωνία λέγεται **υποτείνουσα**,
- **αμβλυγώνιο** όταν μία γωνία του είναι αμβλεία. (Σχ.11)



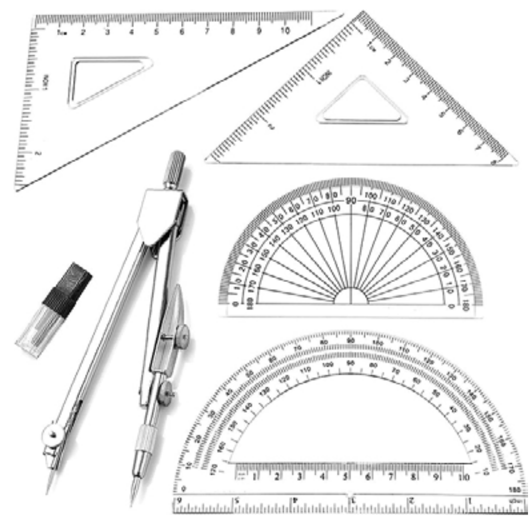
Σχήμα 11

Ε. Τα γεωμετρικά όργανα

Στα επόμενα κεφάλαια θα χρησιμοποιήσουμε γεωμετρικά όργανα, για να κατασκευάσουμε γεωμετρικά σχήματα τα οποία θα μελετήσουμε.

Τα βασικά όργανα κατά την Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι:

- Ο διαβήτης με τον οποίο σχεδιάζουμε κύκλους, αλλά και συγκρίνουμε τμήματα μεταξύ τους.
- Ο κανόνας, που είναι ο γνωστός μας χάρακας, χωρίς κατά ανάγκη να υπάρχει διαβάθμιση, δηλαδή χωρίς να υπάρχει ο χωρισμός του σε εκατοστά. Το όργανο αυτό το χρησιμοποιούμε για τη χάραξη ευθειών.



Εκτός από αυτά θα χρησιμοποιήσουμε επίσης:

- Το μοιρογνωμόνιο, το οποίο είναι όργανο μέτρησης τόξων και κατά επέκταση γωνιών.
- τον γνώμονα, με τον οποίο σχεδιάζουμε καθέτους.

Σε όλη τη διάρκεια της ενασχόλησής μας με τη Γεωμετρία τα όργανα αυτά πρέπει να είναι στη διάθεσή μας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Παράλληλες ευθείες

1.1
Ιδιότητες παράλληλων ευθειών

Τι καινούργιο υπάρχει στην ενότητα

Στις παρακάτω σελίδες:

- γνωρίζουμε το Ευκλείδειο αίτημα και τη σημασία του στην εξέλιξη της Γεωμετρίας,
- ανακαλύπτουμε και αποδεικνύουμε τις ιδιότητες των γωνιών που σχηματίζονται, όταν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη ευθεία,
- ανακαλύπτουμε τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα σε γωνίες με παράλληλες πλευρές,
- κατασκευάζουμε παράλληλη σε δεδομένη ευθεία από σημείο εκτός αυτής.

Απαραίτητες γνώσεις

Δύο ευθείες του ίδιου επιπέδου θα λέγονται παράλληλες, όταν δεν τέμνονται.

Ή όπως διατυπώνει ο Ευκλείδης:

Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

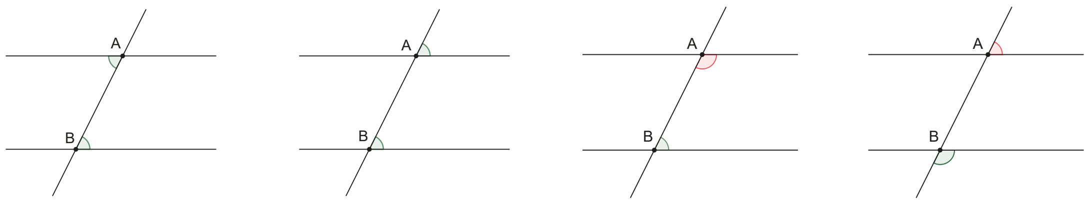
Ας σχεδιάσουμε, λοιπόν, δύο παράλληλες ευθείες και μια τρίτη που τις τέμνει στα σημεία Α και Β. Τότε σχηματίζονται τέσσερις γωνίες με κορυφή το Α και τέσσερις με κορυφή το Β. Τις γωνίες αυτές τις ονομάζουμε:

- **Εντός** αν είναι μέσα στη ζώνη των παραλλήλων, (ανάμεσα στις δύο παράλληλες).
- **Εκτός** αν είναι έξω από τη ζώνη των παραλλήλων.

Και μία γωνία με κορυφή το Α με μια γωνία με κορυφή το Β θα λέγονται:

- **Επί τα αυτά μέρη** όταν βρίσκονται προς το ίδιο μέρος σε σχέση με την τέμνουσα και
- **Εναλλάξ** όταν βρίσκονται εκατέρωθεν της τέμνουσας.

Έτσι σχηματίζονται διάφοροι συνδυασμοί γωνιών για παράδειγμα. (Σχ.1)

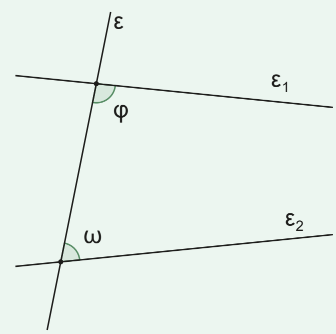


Εντός εναλλάξ | Εντός εκτός και επί τα αυτά | Εντός και επί τα αυτά | Εκτός και επί τα αυτά

Σχήμα 1

Ο Ευκλείδης ξεκίνησε να γράφει το βιβλίο Γεωμετρίας του αρχίζοντας με 5 αξιώματα.
Το 5ο από αυτά λέει: αν δύο ευθείες $ε_1$, $ε_2$ τέμνονται από τρίτη ευθεία ε με τέτοιο τρόπο, ώστε να σχηματίζονται εντός και επί τα αυτά γωνίες με άθροισμα μικρότερο των 180°, τότε οι $ε_1$, $ε_2$ τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται αυτές οι γωνίες. (Σχ.2) Το αίτημα αυτό αποδεικνύεται ότι παίρνει διάφορες ισοδύναμες μορφές. Η πιο απλή είναι η παρακάτω που αποτελεί στη μαθηματική βιβλιογραφία το περίφημο:

Ευκλείδειο αίτημα (5ο αίτημα των Στοιχείων)
Από σημείο εκτός ευθείας άγεται μόνο μία παράλληλος προς αυτήν.



Σχήμα 2

Ανοίξτε το αρχείο GeoGebra και πειραματιστείτε.

Δραστηριότητα

Ένας ξυλουργός θέλει να κόψει τη σανίδα, ώστε τα δύο κοψίματα να είναι παράλληλα μεταξύ τους. Έχει ήδη σχεδιάσει που θα κόψει την πρώτη φορά και θέλει να σχεδιάσει σωστά τη δεύτερη γραμμή. Όπως φαίνεται και στην εικόνα, διαθέτει ένα ψηφιακό μοιρογνωμόνιο ακριβείας και ένα μολύβι.
Τι σκοπεύει να κάνει;
Περιγράψτε μία διαδικασία με την οποία ο ξυλουργός μπορεί να ελέγξει κατά πόσο είναι παράλληλα τα δύο κοψίματα.

Ας δούμε τι έχει προκύψει

Με όσα αναφέραμε πλέον έχουμε ένα εργαλείο για να διαπιστώνουμε αν δύο ευθείες είναι παράλληλες ή όχι. Φέρουμε μία τέμνουσα και μετράμε γωνίες.
Αν οι εντός και επί τα αυτά γωνίες είναι παραπληρωματικές, τότε οι δύο ευθείες είναι παράλληλες, αν όχι τέμνονται.

Χρησιμοποιώντας το συμπέρασμα αυτό **δικαιολογείστε γιατί**:
1. Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.

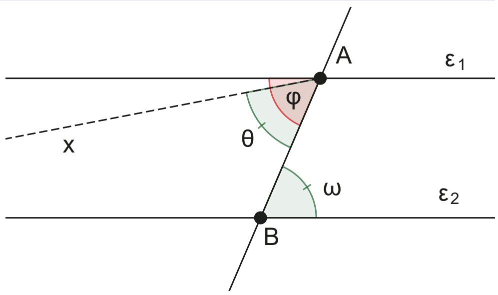
2. Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.
3. Αν δύο ευθείες είναι κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά της σημεία, τότε θα είναι μεταξύ τους παράλληλες.

Επιπλέον ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη ευθεία, τότε οι εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζονται είναι ίσες. (Σχ.3)

Ας γνωρίσουμε την απόδειξη του Ευκλείδη χρησιμοποιώντας το 5ο αίτημα και μια νέα μέθοδο απόδειξης, που θα μας εκπλήξει με την απλότητά της.



Σχήμα 3

Αποδειξη

Έστω ότι οι παράλληλες ε_1 και ε_2 τέμνονται από μια τρίτη ευθεία στα Α και Β. Θα αποδείξουμε ότι οι σχηματιζόμενες εντός εναλλάξ γωνίες ω και φ θα είναι ίσες.

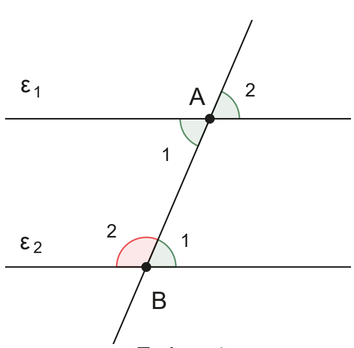
Έστω ότι δεν είναι ίσες.

Τότε θα μπορούμε να φέρουμε μία ημιευθεία Αx ώστε η γωνία θ να είναι ίση με την γωνία ω.
Εφαρμόζοντας τα προηγούμενα καταλήγουμε ότι $Ax \parallel \varepsilon_2$. (Αx παράλληλη της ε_2).
Άρα, από το σημείο Α έχουμε φέρει δύο παράλληλες, τις Αx και ε_1 προς την ε_2, **άτοπο**!
Συμπέρασμα που έρχεται σε αντίθεση με το Ευκλείδειο αίτημα.
Άρα, οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες. ■

*Η μέθοδος **«απαγωγής εις άτοπον»** προκαλεί απορίες, όταν την αντιμετωπίζουμε για πρώτη φορά. Όμως, διακρίνεται από απλότητα και λειτουργικότητα που ξαφνιάζει ακόμα και σήμερα για το μεγαλείο της μαθηματικής σκέψης, που είχαν φθάσει οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί.*
Η λογική της «ξεκινά» με την υιοθέτηση ως υπόθεσης της άρνησης του συμπεράσματος της πρότασης που θέλουμε να δείξουμε. Έπειτα με λογικούς συλλογισμούς θα καταλήξουμε σε κάτι άτοπο – ψευδές. Οπότε, το γεγονός ότι καταλήξαμε σε άτοπο οφείλεται στην αρχική λανθασμένη υπόθεση, άρα η ζητούμενη πρόταση είναι σωστή.

Άμεσο συμπέρασμα των παραπάνω είναι ότι αν έχουμε δύο παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και ε μία τέμνουσά τους, τότε σχηματίζονται ζεύγη γωνιών όπως:

Εντός εναλλάξ – Εντός και επί τα αυτά - Εντός εκτός και επί τα αυτά, που έχουν τις παρακάτω σχέσεις μεταξύ τους. (Σχ.4)



Σχήμα 4

Ονομασία	Σχέση
Εντός εναλλάξ	Π.χ. $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ είναι ίσες
Εντός και επί τα αυτά	Π.χ. $\hat{A}_1 + \hat{B}_2 = 180^\circ$ είναι παραπληρωματικές
Εντός - εκτός και επί τα αυτά	Π.χ. $\hat{B}_1 = \hat{A}_2$ είναι ίσες

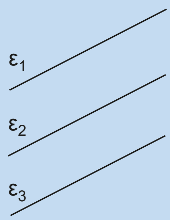
Από τα προηγούμενα αποδεικνύονται μια σειρά από πορίσματα, χρήσιμα για αυτά που ακολουθούν:

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

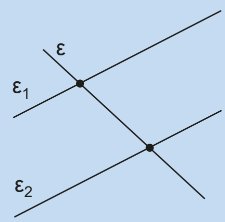
Α) Αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και $\varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$ τότε $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_3$ (Σχ. 5α).

Β) Αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και η ευθεία ε τέμνει την ε_1 τότε θα τέμνει και την ε_2. (Σχ.5β)

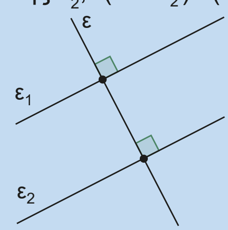
Γ) Αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και η ε κάθετη της ε_1, $(\varepsilon \perp \varepsilon_1)$, τότε η ε θα είναι κάθετη και της ε_2, $(\varepsilon \perp \varepsilon_2)$. (Σχ.5γ)



Σχήμα 5α



Σχήμα 5β

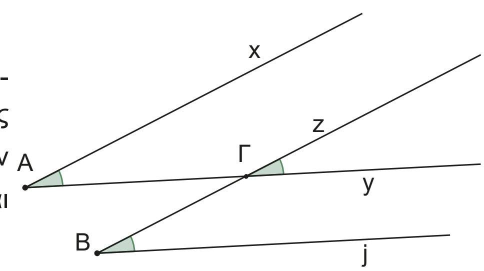


Σχήμα 5γ

Δ) Αν δύο οξείες γωνίες (αντίστοιχα αμβλείες) έχουν τις πλευρές τους παράλληλες μία προς μία, τότε θα είναι ίσες. (Σχ.6)

Αποδειξη

Έστω οι οξείες γωνίες $x\hat{A}y$ και $z\hat{B}j$ που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες (όπως στο σχήμα) τότε θα ισχύουν $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων Ax και Bz που τέμνονται από την Ay και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων Ay και Bj που τέμνονται από την Bz. Άρα θα είναι και $\hat{A} = \hat{B}$ ■.



Σχήμα 6

Παρόμοια αποδείξτε ότι:

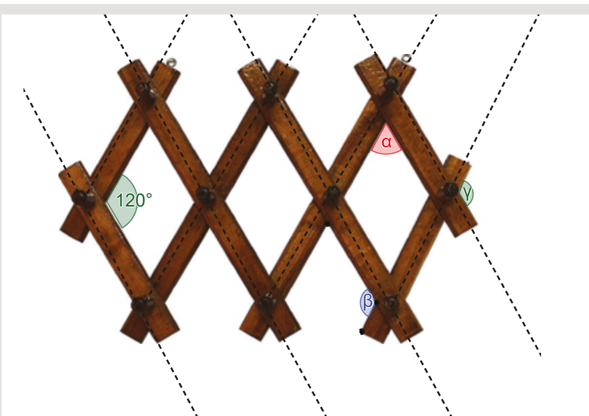
Ε) Αν μία οξεία και μία αμβλεία γωνία έχουν τις πλευρές τους παράλληλες μία προς μία, τότε θα είναι παραπληρωματικές.

Δραστηριότητα

Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες που μάθαμε παραπάνω για να απαντήσετε στο ερώτημα της δραστηριότητας.

Για να κατασκευαστεί μία λειτουργική αλλά και καλαίσθητη κρεμάστρα χρησιμοποιούμε τεμνόμενες παράλληλες σανίδες.

Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζεται μια τέτοια. Έχουμε μετρήσει μία από τις γωνίες που σχηματίζονται και θέλουμε να υπολογίσουμε τις γωνίες α, β και γ. Μπορείτε να βοηθήσετε;



Σε τι χρησιμεύουν τα παραπάνω;

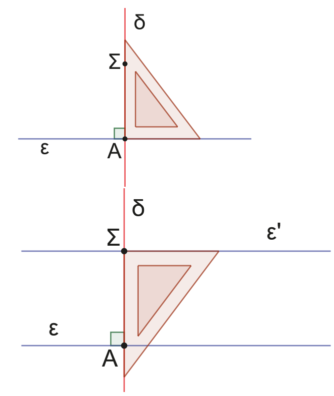
Με όσα έχουμε αναφέρει μέχρι τώρα είμαστε σε θέση να ασχοληθούμε με μία βασική κατασκευή:

Να κατασκευάσουμε παράλληλη σε δεδομένη ευθεία από σημείο εκτός αυτής. (Σχ.7)

Έστω η ευθεία ε και ένα σημείο Σ εκτός αυτής. Θέλουμε να κατασκευάσουμε μία ευθεία παράλληλη της ε που να διέρχεται από το Σ. Παρατηρείστε τις ενέργειες που παρουσιάζονται στα παρακάτω σχήματα:

Με τον γνώμονα κατασκευάζουμε κάθετη ευθεία δ από το σημείο Σ προς την ε.
Με τον γνώμονα κατασκευάζουμε κάθετη ευθεία ε΄ προς την δ στο σημείο Σ.
Η ευθεία ε΄ είναι η ζητούμενη ευθεία.
Μπορείτε να δικαιολογήσετε γιατί η ε΄ είναι παράλληλη της ε;

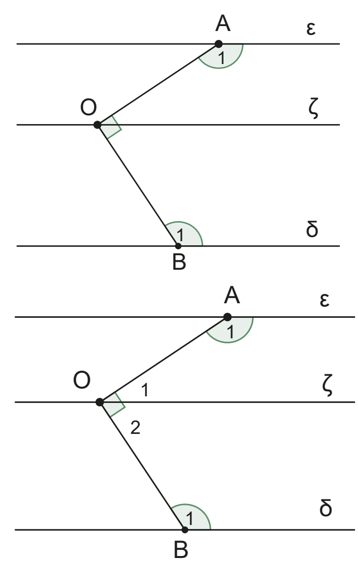
Το μήκος του κάθετου ευθύγραμμου τμήματος ΣΑ που άγεται από το σημείο Σ στην ευθεία ε, λέγεται απόσταση του σημείου ε από την ευθεία ε.



Σχήμα 7

Παραδειγματα

1. Στο διπλανό σχήμα έχουμε φέρει τις $ε \parallel δ \parallel ζ$. Θεωρούμε τα σημεία Α, Β, Ο τέτοια ώστε $A\hat{O}B = 90°$. Να αποδείξετε ότι $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 270°$.



Λυση

Όπως φαίνεται στο σχήμα την ορθή γωνία την χωρίζει η ευθεία ζ σε δύο γωνίες τις $\hat{O}_1$ και $\hat{O}_2$, για τις οποίες ισχύουν: $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 90°$ (1).

Οι γωνίες $\hat{O}_1$ και $\hat{A}_1$ είναι παραπληρωματικές ως γωνίες εντός επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $ε \parallel ζ$ που τέμνονται από την ΟΑ, άρα $\hat{A}_1 = 180° - \hat{O}_1$ (2).

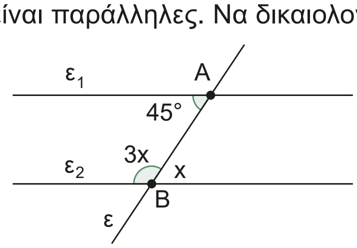
Όμοια οι γωνίες $\hat{O}_2$ και $\hat{B}_1$ είναι παραπληρωματικές ως γωνίες εντός επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $δ \parallel ζ$ που τέμνονται από την ΟΒ, άρα $\hat{B}_1 = 180° - \hat{O}_2$ (3).

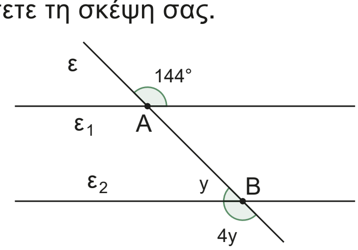
Οπότε έχουμε:

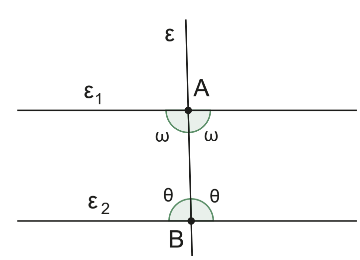
$$\hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 180° - \hat{O}_1 + 180° - \hat{O}_2 = 360° - (\hat{O}_1 + \hat{O}_2) = 360° - 90° = 270°$$

Ερωτήσεις κατανόησης

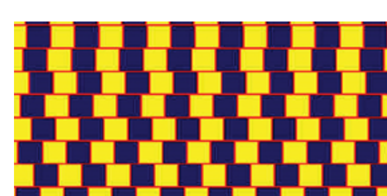
1. Στα παρακάτω σχήματα παρουσιάζονται οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ που τέμνονται από την ε. Εξετάστε αν είναι παράλληλες. Να δικαιολογήσετε τη σκέψη σας.





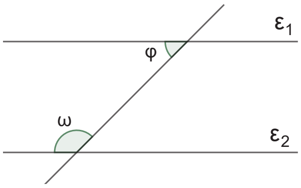


2. Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζεται ένα πλακόστρωτο από μπλε και κίτρινα τετράγωνα. Οι κόκκινες γραμμές που εμφανίζονται είναι παράλληλες;



3. Μελετώντας το διπλανό σχήμα, αν γνωρίζετε ότι $\varphi + \omega = 180^\circ$ δικαιολογήστε γιατί το επίπεδο του τραπεζιού είναι παράλληλο στο επίπεδο που βρίσκονται τα καθίσματα.

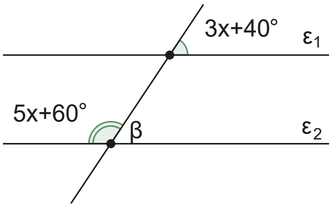
4. Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και $\varphi = \frac{1}{4}\omega$, τότε:



Α. $\omega = 144^\circ$ **Β.** $\omega = 36^\circ$ **Γ.** $\omega = 150^\circ$

Δ. $\omega = 135^\circ$ **Ε.** $\omega = 45^\circ$

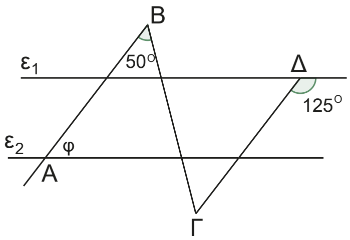
5. Αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ τότε η γωνία β στο διπλανό σχήμα ισούται με:



Α. 110° **Β.** 35° **Γ.** 70°

Δ. 120° **Ε.** 10°

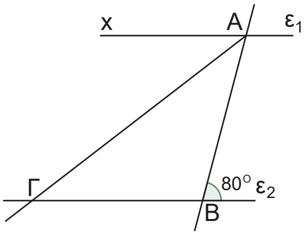
6. Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και $AB \parallel \Gamma\Delta$.
Η γωνία φ ισούται με:



Α. 50° **Β.** 55° **Γ.** 60°

Δ. 125° **Ε.** 75°

7. Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $x\hat{A}B$. Η γωνία $A\hat{\Gamma}B$ ισούται με:



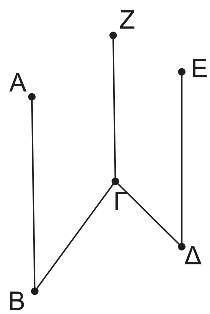
Α. 30° **Β.** 40° **Γ.** 50°

Δ. 60° **Ε.** 70°

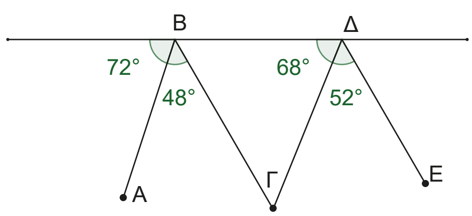
Ασκήσεις

1. Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζεται η όψη ενός σπιτιού. Οι δύο κατακόρυφοι τοίχοι του και η κεκλιμένη οροφή του. Αν τα μέτρα των σημειωμένων γωνιών είναι $5\beta, 4\beta, 3\alpha$ και 90°.
Να υπολογίσετε τα α και β σε μοίρες.

2. Στο παρακάτω σχήμα είναι $BA \parallel \Gamma Z \parallel \Delta E$ και $A\hat{B}\Gamma = 2x + y$, $E\hat{\Delta}\Gamma = 2x - y$, $B\hat{\Gamma}Z = 140^\circ$ και $\Delta\hat{\Gamma}Z = 160^\circ$. Υπολογίστε τα x, y.

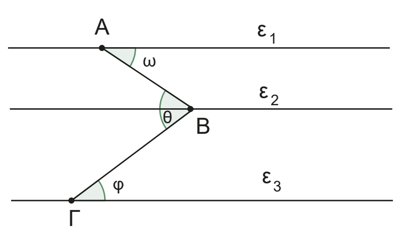


3. Στο παρακάτω σχήμα ποια ευθύγραμμα τμήματα είναι παράλληλα και ποια δεν είναι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

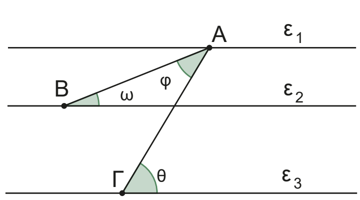


4. Στα παρακάτω σχήματα οι ευθείες ε_1, ε_2 και ε_3 είναι παράλληλες μεταξύ τους. Να αποδείξετε ότι μεταξύ των σημειωμένων γωνιών ισχύει η σχέση θ = ω+ φ.

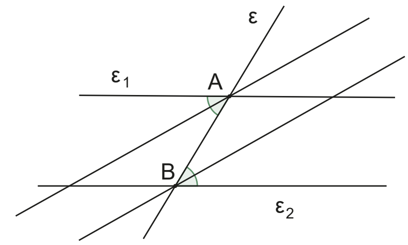
α)



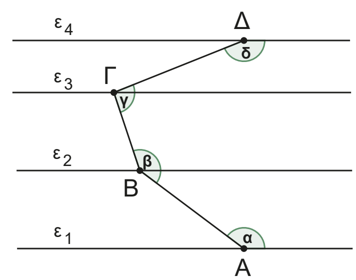
β)



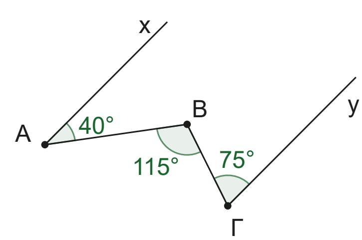
5. Αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και ε μία τρίτη ευθεία που τις τέμνει στα σημεία Α, Β. Να αποδείξετε ότι, αν φέρουμε τις διχοτόμους δύο εντός εναλλάξ γωνιών, αυτές θα είναι παράλληλες μεταξύ τους.



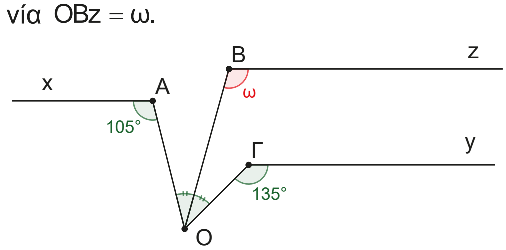
6. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε φέρει τις παράλληλες $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3 \parallel \varepsilon_4$ και έχουμε θεωρήσει πάνω σε αυτές τα σημεία Α, Γ, Β και Δ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το άθροισμα α + β + γ + δ των σχηματιζόμενων γωνιών.



7. Στο παρακάτω σχήμα είναι σημειωμένες τρεις γωνίες και τα μέτρα τους. Οι ημιευθείες Αx και Γy είναι παράλληλες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



8. Στο παρακάτω σχήμα οι ημιευθείες Ax, Bz και Γy είναι παράλληλες μεταξύ τους. Αν $x\hat{A}O = 105^\circ$, $O\hat{\Gamma}y = 135^\circ$ και η ΟΒ είναι η διχοτόμος της γωνίας $A\hat{O}\Gamma$, να υπολογίσετε τη γωνία $O\hat{B}z = \omega$.



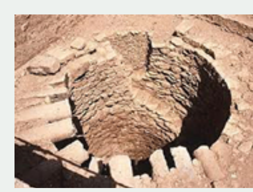
Στιγμές της ιστορίας των Μαθηματικών...

Έγιναν πολλές προσπάθειες για να απαλλαγούν τα «Στοιχεία» από τις αμφιβολίες του 5ου αιτήματος. Έτσι, πολλοί μαθηματικοί προσπάθησαν να αποδείξουν το 5ο αίτημα ως θεώρημα που προκύπτει από τα άλλα αιτήματα, ενώ άλλοι προσπάθησαν να το αντικαταστήσουν με ένα άλλο ισοδύναμό του ίσως περισσότερο προφανές και λιτό ως προς τη διατύπωσή του.
Είναι απορίας άξιο γιατί τόσοι μαθηματικοί ασχολήθηκαν σε μία περίοδο 2000 χρόνων με το 5ο αίτημα του Ευκλείδη. Ίσως ο λόγος να ήταν ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία υπήρξε σε όλο αυτό το διάστημα ο μοναδικός κλάδος των Μαθηματικών που στηριζόταν σε μία μορφή λογικής θεμελίωσης. Έτσι, για να είναι σίγουροι ότι οι όποιες «ανακαλύψεις» στηρίζονταν σε γερά θεμέλια, κατέφευγαν στη Γεωμετρία, δίνοντας σε πολλές προτάσεις ακόμα και της Άλγεβρας και της Ανάλυσης μορφή και απόδειξη Γεωμετρική. Ο Νεύτωνας, για παράδειγμα, φρόντισε να δίνει σε όλο το έργο του τη μορφή της κλασικής Γεωμετρίας που ήταν κατανοητή στους σύγχρονούς του Μαθηματικούς και Φυσικούς.
Τα αποτελέσματα της αναζήτησης 20 αιώνων μπορούν να συνοψιστούν στα εξής:
- *Το Ευκλείδειο αίτημα είναι αδύνατο να αποδειχθεί, και η άρνησή του δεν οδηγεί σε κάποιου είδους αντίφαση.*
- *Με την προσθήκη της αντίθετης υπόθεσης στα αξιώματα της Γεωμετρίας είναι δυνατό να δημιουργηθεί μία λογικά τεκμηριωμένη Γεωμετρία, διαφορετική από την Ευκλείδεια.*

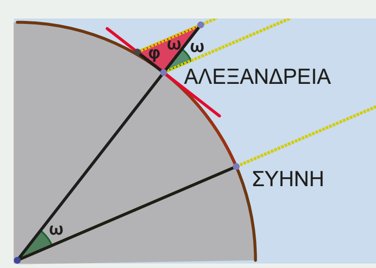
Εργασία για το σπίτι

Τα μαθηματικά υπάρχουν για να λύνουν προβλήματα. Εφαρμόζονται εκεί που δεν το περιμένεις. Χαρακτηριστικό παράδειγμα εφαρμοσμένων μαθηματικών είναι ο τρόπος που ο Έλληνας μαθηματικός Ερατοσθένης (276 π.Χ.-194 π.Χ.) υπολόγισε το μήκος της Γης!

Ο Ερατοσθένης γνώριζε ότι η πόλις Συήνη βρίσκεται νότια της Αλεξάνδρειας σε μία απόσταση σχεδόν 800 χιλιομέτρων.
Γνώριζε, επίσης, ότι το μεσημέρι του θερινού ηλιοστασίου ο ήλιος βρίσκεται κατακόρυφα πάνω από την πόλη, πράγμα που επιβεβαιωνόταν από το γεγονός ότι μόνο τότε ο ήλιος φώτιζε μέχρι τον πάτο το μεγάλο πηγάδι της πόλης που είχαν για την ύδρευσή τους οι κάτοικοι.



Με τη βοήθεια, λοιπόν, μιας μέτρησης και μιας παρατήρησης κατόρθωσε κάτι εκπληκτικό!
Να μετρήσει πόσο μεγάλη είναι η Γη, εφαρμόζοντας προτάσεις Γεωμετρίας!
Κατά αρχήν θεώρησε ότι οι ακτίνες του ήλιου πέφτουν σε κάθε σημείο στη Γη παράλληλα, λόγω της μεγάλης απόστασης Γης-Ηλίου.
Μετά με τη βοήθεια ενός γνώμονα στην Αλεξάνδρεια υπολόγισε τη γωνία που σχηματίζουν οι κατακόρυφοι στις δύο πόλεις. Παρατηρείστε πως εφαρμόζεται ότι δύο εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες είναι ίσες.
Τη γωνία την υπολόγισε ίση με $7{,}2^\circ$ ή ίση με το $\frac{1}{50}$ του κύκλου.



Δείτε το video.

Βρείτε πόσο είναι η περιφέρεια της Γης σύμφωνα με τις μετρήσεις του Ερατοσθένη. Ψάξτε στο διαδίκτυο για το πείραμα του Ερατοσθένη και τις δυνατότητες που υπάρχουν να γίνει από σας τους ίδιους.

1.2 Γωνίες του τριγώνου

Τι καινούργιο υπάρχει στην ενότητα

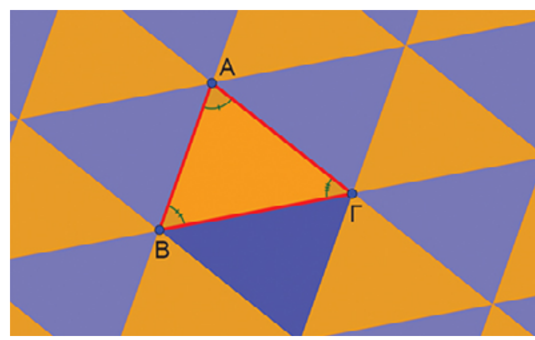
Στις παρακάτω σελίδες:
- υπολογίζουμε το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου, αλλά και του κυρτού ν-γώνου.
- ανακαλύπτουμε τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα σε γωνίες με πλευρές κάθετες.

Απαραίτητες γνώσεις

Έχουμε ήδη μάθει ότι αν δύο παράλληλες τέμνονται από μία τρίτη ευθεία τότε:
Οι εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζονται είναι ίσες.
Οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζονται είναι παραπληρωματικές.
Οι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζονται είναι ίσες.

Δραστηριότητα

Στο διπλανό σχέδιο παρουσιάζεται ένα πλακόστρωτο που κατασκευάζεται από ένα πανομοιότυπο τριγωνικό πλακάκι ΑΒΓ. Παρατηρείστε ότι σχηματίζεται ένας καμβάς από παράλληλες ευθείες.
Συνδυάστε τις γνώσεις που ήδη έχετε. Βρείτε με ποιες γωνίες είναι ίσες στο σχήμα οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ και υπολογίστε το άθροισμα των γωνιών του.



Ας δούμε τι έχει προκύψει

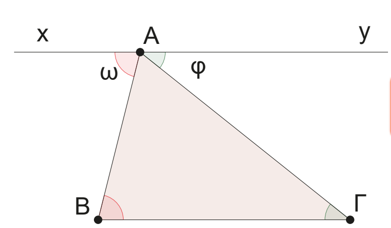
Από την παραπάνω δραστηριότητα καταλήγουμε στο παρακάτω:

ΘΕΩΡΗΜΑ (Σχ.8)

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με μία ευθεία γωνία, δηλαδή είναι 180° .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν από τη κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε την παράλληλη xy προς την ΒΓ τότε θα είναι $\hat{B} = \omega$ και $\hat{\Gamma} = \varphi$ (ως εντός εναλλάξ).
Άρα $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = \hat{A} + \omega + \varphi = 180^\circ$ (ευθεία γωνία). ■



Σχήμα 8

Σε τι χρησιμεύουν τα παραπάνω;

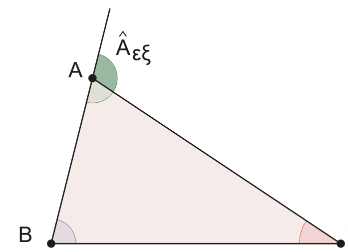
Άμεσα συμπεράσματα του παραπάνω θεωρήματος είναι τα παρακάτω:

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

Α) Το άθροισμα των οξειών γωνιών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με 90°. (Γιατί;)

Αν προεκτείνουμε μία πλευρά ενός τριγώνου, για παράδειγμα την ΒΑ προς το Α, σχηματίζεται η γωνία $x\hat{A}\Gamma$. Η γωνία αυτή ονομάζεται εξωτερική γωνία του τριγώνου και συμβολίζεται $\hat{A}_{\varepsilon\xi}$.
Θα αποδείξουμε ότι:

Β) Η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου. (Σχ.9)



Σχήμα 9

Αποδειξη

Η εξωτερική γωνία $\hat{A}\varepsilon\xi$ είναι παραπληρωματική της $\hat{A}$, άρα

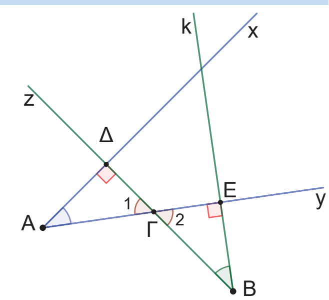
$\hat{A}\varepsilon\xi = 180^\circ - \hat{A}$ (1), επίσης επειδή $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ-\hat{A}$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε $\hat{A}\varepsilon\xi = \hat{B}+\hat{\Gamma}$. ■

Όταν έχουμε δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες, τότε ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις.

1. Δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες. (Σχ.10)

Αποδειξη



Σχήμα 10

Έστω οι οξείες γωνίες $x\hat{A}y$ και $z\hat{B}k$ που έχουν τις πλευρές τους κάθετες, δηλαδή $Bz \perp Ax$ και $Bk \perp Ay$. Ονομάζουμε Γ το σημείο τομής των Bz και Ay, Ε το σημείο τομής των Bk και Ay και Δ το σημείο τομής των Ax και Bz, όπως στο σχήμα. Στο τρίγωνο ΑΓΔ ισχύει $\hat{A}+\hat{\Gamma}_1+90^\circ=180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}=90^\circ-\hat{\Gamma}_1$ (1).

Όμοια στο τρίγωνο ΒΓΕ ισχύει $\hat{B}+\hat{\Gamma}_2+90^\circ=180^\circ \Leftrightarrow \hat{B}=90^\circ-\hat{\Gamma}_2$ (2).

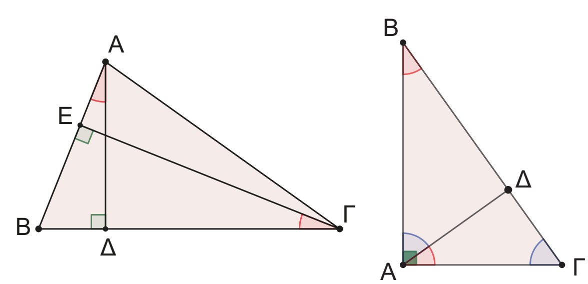
Αλλά $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Gamma}_2$ (3), ως κατακορυφήν γωνίες.

Οπότε από (1), (2), (3) έχουμε τελικά ότι $\hat{A}=\hat{B}$. ■

2. Δύο αμβλείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.

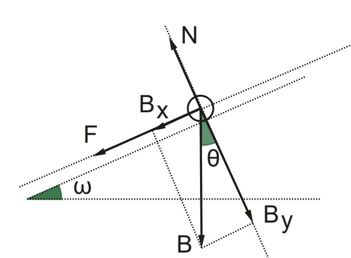
3. Μία αμβλεία και μία οξεία γωνία που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι παραπληρωματικές.

Τα παραπάνω εφαρμόζονται σε ασκήσεις Γεωμετρίας, όταν έχουμε φέρει ύψη σε τυχαίο ή ορθογώνιο τρίγωνο. (Σχ.11)



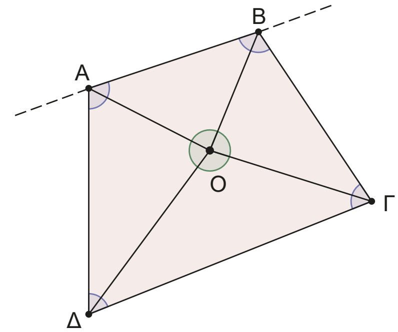
Σχήμα 11

Αλλά και στην Φυσική! (Σχ.12)
Όταν θα αναλύουμε το βάρος ενός σώματος, που κινείται σε κεκλιμένο επίπεδο, σε δύο συνιστώσες.
Όπως παρουσιάζεται στο διπλανό σχήμα είναι $\omega=\theta$.



Σχήμα 12

Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου. (Σχ.13)



Σχήμα 13

Σχεδιάζουμε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ όπως αυτό του διπλανού σχήματος, όπου ο φορέας κάθε πλευράς του αφήνει το σχήμα στο ίδιο ημιεπίπεδο. Ένα τέτοιο τετράπλευρο θα το λέμε **κυρτό**. Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο σημείο Ο στο εσωτερικό του.

Πόσα τρίγωνα σχηματίζονται;

- Τέσσερα.

Πόσο είναι το άθροισμα των γωνιών των τεσσάρων τριγώνων;

- $4 \cdot 180^\circ$.

Είναι σωστό να ισχυριστούμε ότι και το άθροισμα των γωνιών του τετραπλεύρου είναι και αυτό $4 \cdot 180^\circ$;

- Προφανώς όχι, γιατί στο $4 \cdot 180^\circ$, συμπεριλαμβάνονται και όλες οι γωνίες των τριγώνων με κορυφή το σημείο Ο.

Άρα, πόσο θα είναι το άθροισμα των γωνιών των τεσσάρων τριγώνων;

- Θα πρέπει από το $4 \cdot 180^\circ$ να αφαιρέσουμε 360°, άρα είναι ίσο με $4 \cdot 180^\circ - 360^\circ = ...$

Δραστηριότητα

Εφαρμόστε την ίδια στρατηγική για να βρείτε το άθροισμα των γωνιών ενός πενταγώνου, ενός εξαγώνου, κλπ.

Συμπληρώστε τον πίνακα.

Μπορείτε να καταλήξετε σε έναν τύπο που να μας δίνει το άθροισμα των γωνιών ενός οποιουδήποτε πολυγώνου με ν πλευρές;

Αριθμός πλευρών	Άθροισμα γωνιών
4	
5	
6	
7	
8	

Μετά από τα παραδείγματα αυτά είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα για το άθροισμα των γωνιών ενός οποιουδήποτε πολυγώνου με ν πλευρές, όπου ν οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού ν-γώνου είναι (ν – 2)·180°.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν θεωρήσουμε ένα τυχαίο σημείο Ο στο εσωτερικό του, τότε ενώνοντας το σημείο αυτό με τις ν κορυφές σχηματίζονται ν τρίγωνα.

Το άθροισμα των γωνιών των τριγώνων αυτών είναι ίσο με $\nu \cdot 180^\circ$.

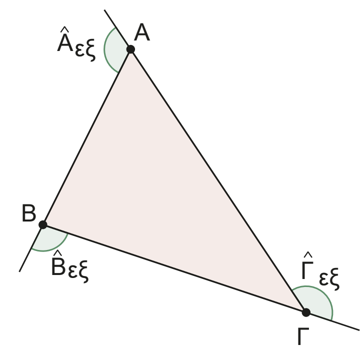
Οπότε το άθροισμα των γωνιών του ν-γώνου θα είναι $\nu \cdot 180^\circ - 360^\circ = (\nu - 2) \cdot 180^\circ$. ■

Ας αναρωτηθούμε τώρα πόσο είναι το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός τριγώνου; (Σχ.14)

Προεκτείνοντας κυκλικά τις πλευρές του τριγώνου μπορούμε να σχηματίσουμε τις εξωτερικές γωνίες του τριγώνου.

Έχουμε διαδοχικά

$$\hat{A}_{\varepsilon\xi}+\hat{B}_{\varepsilon\xi}+\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}=(180^\circ-\hat{A})+(180^\circ-\hat{B})+(180^\circ-\hat{\Gamma})=$$
$$3\cdot180^0-(\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma})=3\cdot180^\circ-180^\circ=360^\circ.$$



Σχήμα 14

Δραστηριότητα

Εφαρμόστε την ίδια στρατηγική για να βρείτε το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός τετραπλεύρου, ενός πενταπλεύρου.

Συμπληρώστε τον πίνακα.

Μπορείτε να καταλήξετε σε έναν τύπο που να μας δίνει το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός οποιουδήποτε πολυγώνου με ν πλευρές;

Αριθμός πλευρών	Άθροισμα εξωτερικών γωνιών
4	
5	
6	
7	
8	

Μετά από τα παραδείγματα αυτά είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα για το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός οποιουδήποτε πολυγώνου με ν πλευρές, όπου ν οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός.

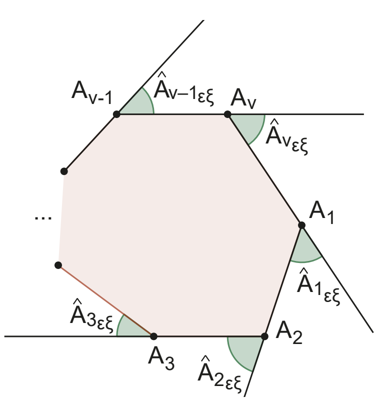
ΠΟΡΙΣΜΑ

Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός κυρτού ν- γώνου είναι 360°. (Σχ.15)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχουμε διαδοχικά:

$$\hat{A}_{1\varepsilon\xi}+\hat{A}_{2\varepsilon\xi}+\hat{A}_{3\varepsilon\xi}+\ldots+\hat{A}_{\nu\varepsilon\xi}=$$
$$(180^\circ-\hat{A}_1)+(180^\circ-\hat{A}_2)+(180^\circ-\hat{A}_3)+\ldots+(180^\circ-\hat{A}_\nu)=$$
$$\nu\cdot180^\circ-(\hat{A}_1+\hat{A}_2+\hat{A}_3+\ldots+\hat{A}_\nu)=\nu\cdot180^\circ-(\nu-2)\cdot180^\circ=360^\circ.$$ ■



Σχήμα 15

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

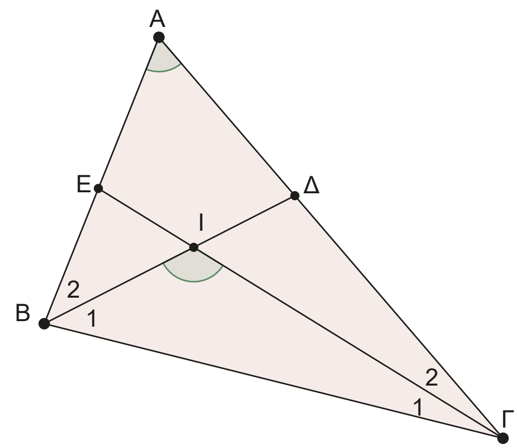
Στα προβλήματα της παραγράφου χρειάζεται να έχουμε μία μέθοδο στον τρόπο επίλυσής τους. Μία σαφή στρατηγική που εφαρμόζοντάς την, να είμαστε σε θέση να λύνουμε οποιαδήποτε άσκηση. Το ζητούμενο βεβαίως είναι να ανακαλύψετε και τους δικούς σας δρόμους, τις δικές σας μεθόδους επίλυσης των ασκήσεων. Κατ' αρχήν, πρέπει να συστηματοποιήσουμε κάποιες βασικές γνώσεις:

Πως μπορεί γενικά να γραφεί μία γωνία;

Μία γωνία μπορεί να εκφραστεί συνήθως με έναν από τους παρακάτω τρόπους:

1. Ως γωνία τριγώνου, οπότε θα είναι ίση με 180° μείον τις άλλες δύο γωνίες του τριγώνου.
2. Ως γωνία τετραπλεύρου, οπότε θα είναι ίση με 360° μείον τις άλλες τρεις γωνίες του τετραπλεύρου.
3. Ως εξωτερική γωνία τριγώνου, οπότε θα είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών.
4. Από το σχήμα, ως άθροισμα ή διαφορά γωνιών.

1. **Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τις διχοτόμους των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ που τέμνονται στο σημείο Ι.**
Να αποδείξετε ότι $\widehat{BI\Gamma} = 90^\circ + \dfrac{\hat{A}}{2}$.



ΛΥΣΗ

Βήμα 1ο: Τη ζητούμενη γωνία θα τη γράφουμε με έναν από τους παραπάνω τρόπους.

Επιλέγουμε να τη γράψουμε ως γωνία του τριγώνου ΒΙΓ, άρα ισχύει ότι:

$$\widehat{BI\Gamma} = 180^\circ - (\hat{B}_1 + \hat{\Gamma}_1)$$

Βήμα 2ο: Η τελική έκφραση θα προσπαθούμε να γραφτεί ως συνάρτηση μόνο των βασικών-αρχικών γωνιών του σχήματος.

Στο παράδειγμα μας το αρχικό βασικό σχήμα είναι το τρίγωνο ΑΒΓ, άρα θα προσπαθήσουμε να έχουμε μόνο τις γωνίες $\hat{A},\hat{B},\hat{\Gamma}$.

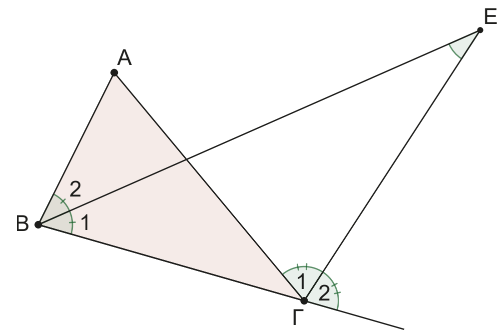
Οι γωνίες $\hat{B}_1,\hat{\Gamma}_1$ είναι οι μισές των $\hat{B},\hat{\Gamma}$ αφού έχουμε φέρει τις διχοτόμους• άρα η ισότητα στην οποία έχουμε καταλήξει γράφεται: $\widehat{BI\Gamma} = 180^\circ - \left(\dfrac{\hat{B}}{2} + \dfrac{\hat{\Gamma}}{2}\right)$.

Βήμα 3ο: Κάνουμε πράξεις και κρατάμε μόνο τις βασικές γωνίες που θέλουμε από το ζητούμενο. Αντικαθιστώντας τις υπόλοιπες, από την ισότητα που ισχύει μεταξύ των γωνιών του βασικού σχήματος.

Άρα $\widehat{BI\Gamma} = 180^\circ - \left(\dfrac{\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2}\right)$ (1) και επειδή $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B}+\hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{A}$ η (1) γράφεται τελικά

$$\widehat{BI\Gamma} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}.$$

2. **Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{B}$ και τη διχοτόμο της εξωτερικής γωνίας της $\hat{\Gamma}$. Αν οι δύο αυτές ευθείες τέμνονται στο Ε να αποδείξετε ότι $B\hat{E}\Gamma = \dfrac{\hat{A}}{2}$.**



ΛΥΣΗ

Στο τρίγωνο ΒΕΓ έχουμε $\hat{E} = 180^\circ - \hat{B}_1 - (\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}_1)$ (βήμα 1ο)

Αλλά $\hat{B}_1 = \dfrac{\hat{B}}{2}$ και $\hat{\Gamma}_1 = \dfrac{\hat{\Gamma}_{εξ}}{2} = \dfrac{\hat{A}+\hat{B}}{2}$,

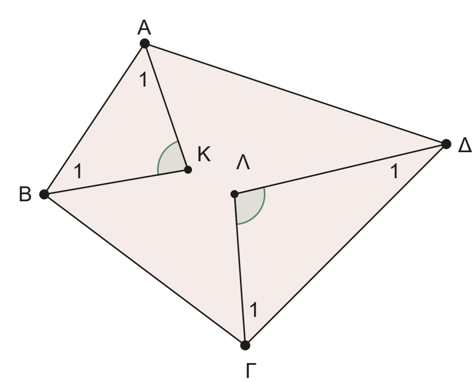
άρα $\hat{E} = 180^\circ - \dfrac{\hat{B}}{2} - \left(\hat{\Gamma} + \dfrac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right)$ (βήμα 2ο).

Κάνουμε πράξεις $\hat{E} = 180^\circ - \dfrac{\hat{B}}{2} - \hat{\Gamma} - \dfrac{\hat{A}+\hat{B}}{2} = \dfrac{360^\circ - \hat{B} - 2\hat{\Gamma} - \hat{A} - \hat{B}}{2} = \dfrac{360^\circ - \hat{A} - 2(\hat{B}+\hat{\Gamma})}{2}$.

Επειδή η ζητούμενη σχέση έχει μόνο την γωνία $\hat{A}$, το άθροισμα $\hat{B}+\hat{\Gamma}$ θα το αντικαταστήσουμε με τη βοήθεια της ισότητας $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B}+\hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{A}$ και θα έχουμε τελικά ότι:

$$\hat{E} = \frac{360^\circ - \hat{A} - 2(180^\circ - \hat{A})}{2} = \frac{360^\circ - \hat{A} - 360^\circ + 2\hat{A}}{2} = \frac{\hat{A}}{2} \quad \text{(Βήμα 3ο).}$$

3. **Στο διπλανό τετράπλευρο οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ τέμνονται στο Κ, ενώ οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}$ στο Λ. Να αποδείξετε ότι $\hat{K} + \hat{\Lambda} = 180^\circ$.**



ΛΥΣΗ

Έχουμε: $\hat{K} + \hat{\Lambda} = (180^\circ - \hat{A}_1 - \hat{B}_1) + (180^\circ - \hat{\Gamma}_1 - \hat{\Delta}_1) =$

$$= 360^\circ - \frac{\hat{A}}{2} - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \frac{\hat{\Delta}}{2} = 360^\circ - \frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}}{2} =$$

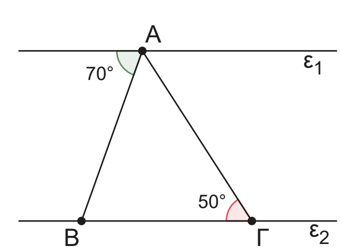
$$= 360^\circ - \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ.$$

Ερωτήσεις κατανόησης

1. Υπάρχει κυρτό πολύγωνο με άθροισμα γωνιών 1800°;
2. Σε ποιο κυρτό πολύγωνο το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών είναι ίσο με το άθροισμα των εξωτερικών του γωνιών;
3. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 70^\circ$. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο σημείο Ι τότε πόσων μοιρών είναι η γωνία $B\hat{I}\Gamma$;
4. Μπορούν οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου να τέμνονται κάθετα;
5. Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες. Η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ ισούται με:

   Α. 50° **Β.** 30° **Γ.** 35°

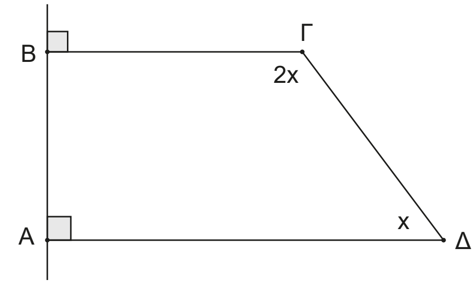
   Δ. 60° **Ε.** 20°



6. Στο διπλανό σχήμα, η γωνία x ισούται με:

Α. 30° **Β.** 50° **Γ.** 60°

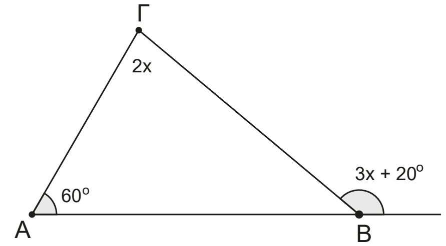
Δ. 70° **Ε.** 55°



7. Στο διπλανό σχήμα, το x ισούται με:

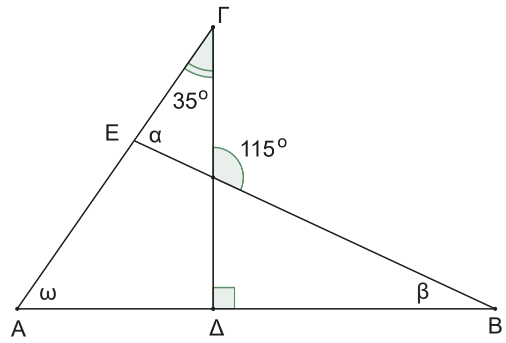
Α. 30° **Β.** 50° **Γ.** 20°

Δ. 70° **Ε.** 40°

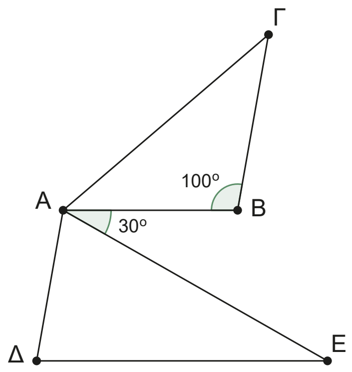


Ασκήσεις

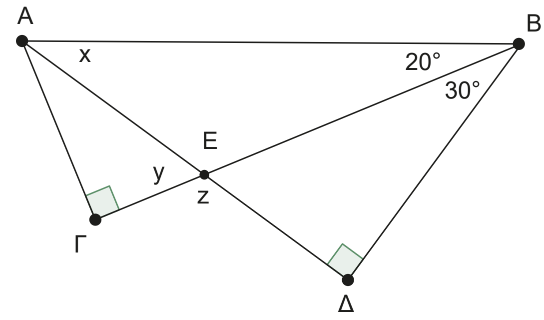
1. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τις γωνίες α, β και ω.



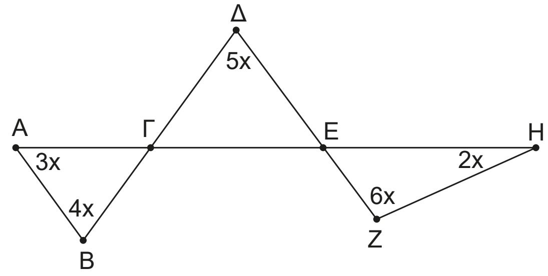
2. Στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΔ || ΒΓ και ΑΒ || ΔΕ. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ.



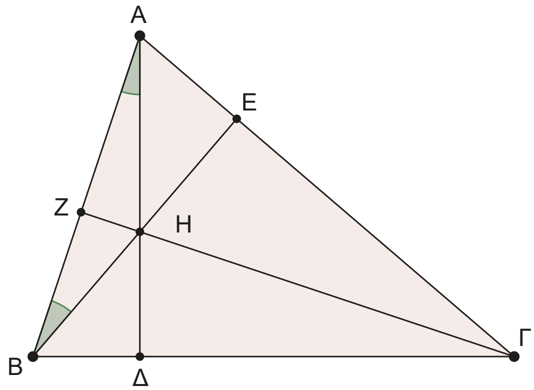
3. Στο παρακάτω σχήμα υπολογίστε τις γωνίες x, y, z.



4. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε το x σε μοίρες.



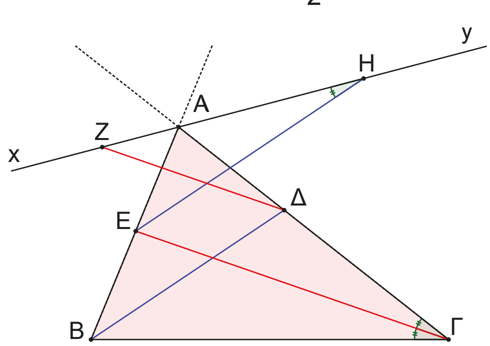
5. Στο παρακάτω τρίγωνο έχουμε φέρει τα τρία ύψη του.
Αν $B\hat{A}H = 20^\circ$ και $A\hat{B}H = 30^\circ$, να αποδείξετε ότι $\hat{\Gamma} = 50^\circ$



6. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ και η διχοτόμος του $A\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

$A\hat{\Delta}\Gamma - A\hat{\Delta}B = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.

7. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τις διχοτόμους $B\Delta$ και ΓE των γωνιών του $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ και τη διχοτόμο της εξωτερικής γωνίας της γωνίας $\hat{A}$.
Μετά φέρουμε $\Delta Z \parallel \Gamma E$ και $EH \parallel B\Delta$ (όπως στο σχήμα).
Να αποδείξετε ότι: $\Delta\hat{Z}A = \dfrac{A\hat{B}\Gamma}{2}$ και $E\hat{H}A = \dfrac{A\hat{\Gamma}B}{2}$



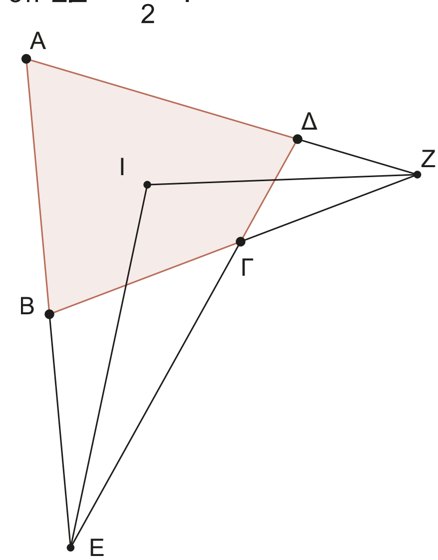
8. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$. Φέρουμε το ύψος $A\Delta$ και τη διχοτόμο AE.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{A}E = \dfrac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$.

β) Αν για τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει $\hat{B} = 90^\circ + \hat{\Gamma}$, να αποδείξετε ότι $A\Delta = \Delta E$.

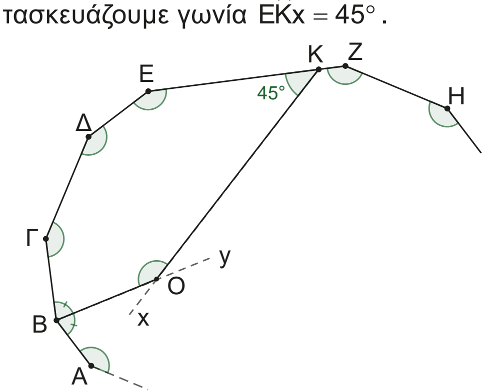
9. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$, $\hat{B}$ κυρτού τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$ τέμνονται σε σημείο E, να αποδείξετε ότι $A\hat{E}B = \dfrac{\hat{\Gamma} + \hat{\Delta}}{2}$.

10. Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, όπου οι πλευρές του AB και $\Delta\Gamma$ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο E και οι $B\Gamma$ και $A\Delta$ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο Z. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{E}$ και $\hat{Z}$ τέμνονται στο σημείο I, να αποδείξετε ότι $E\hat{I}Z = \dfrac{\hat{A} + \hat{\Gamma}}{2}$.



11. Να δικαιολογήσετε γιατί ένα κυρτό πολύγωνο έχει το πολύ τρεις οξείες γωνίες.

12. Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται ένα μέρος από ένα κυρτό πολύγωνο με ν αριθμό πλευρών, με την ιδιότητα όλες οι γωνίες του να είναι ίσες.
Θεωρούμε σημείο K της πλευράς EZ και κατασκευάζουμε γωνία $E\hat{K}x = 45^\circ$.



Αν η Κx τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας $A\hat{B}\Gamma$ στο σημείο Ο και είναι $K\hat{O}B = A\hat{B}\Gamma$, να βρείτε τον αριθμό των πλευρών ν του πολυγώνου.

13. Σε ένα κυρτό πολύγωνο (όλες οι γωνίες του έχουν μέτρο από 0^o έως 180^o) το άθροισμα των γωνιών του –εξαιρουμένης μιας γωνίας του– είναι ίσο με 2190°. Να βρείτε το πλήθος ν των πλευρών του πολυγώνου.

Στιγμές από την Ιστορία των Μαθηματικών

Η βασική γνώση του κεφαλαίου είναι ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180^o.

Είναι όμως πάντα 180^o;

Ήρθε η ώρα να γνωρίσουμε τον ***Johann Carl Friedrich Gauss*** *(1777 – 1855). Ο Γκάους ήταν Γερμανός μαθηματικός που εργάστηκε σε πολλά ερευνητικά πεδία, όπως θεωρία αριθμών, στατιστική, μαθηματική ανάλυση, διαφορική γεωμετρία, αλλά και γεωδαισία, αστρονομία και φυσική.*

Ονομάζεται ***πρίγκηπας των μαθηματικών*** *και θεωρείται από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς μαζί με τον* ***Αρχιμήδη*** *και τον* ***Νεύτωνα****.*

Το 1818 έκανε μια (γεωδαιτική) χαρτογράφηση του κρατιδίου του Ανόβερου. Η καθιερωμένη διαδικασία που χρησιμοποιείται λέγεται ***τριγωνισμός*** *και συνίσταται στην επιλογή ενός πλήθους σημείων, όπου μετριούνται οι μεταξύ τους αποστάσεις.*

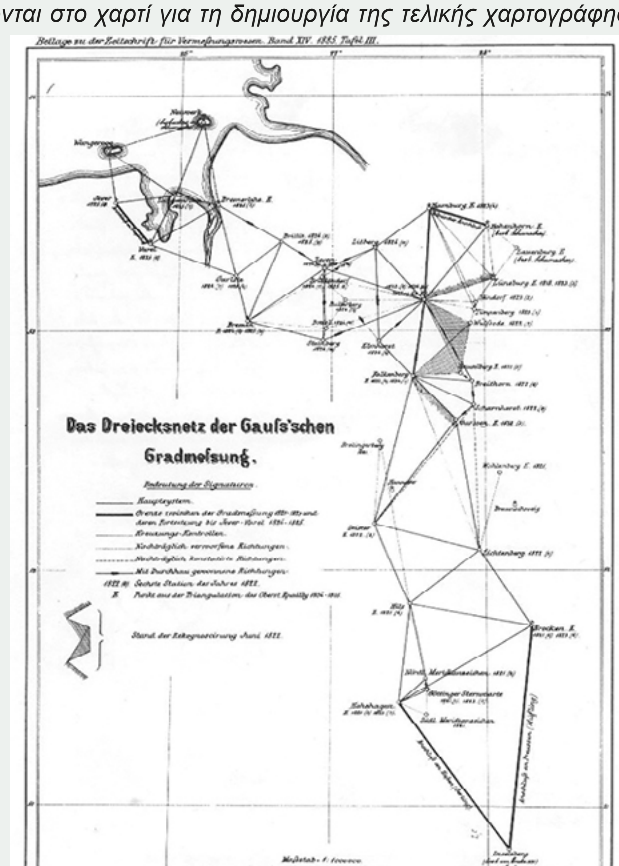
Με τον τρόπο αυτό όλη η περιοχή αποτυπώνεται από ένα δίκτυο τριγώνων.

Ο τρόπος με τον οποίο τα τρίγωνα αυτά συναρμόζονται στο χαρτί για τη δημιουργία της τελικής χαρτογράφησης εξαρτάται από το σχήμα της γης.

Αν η γη ήταν επίπεδη, θα ίσχυαν οι σχέσεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Αν η γη ήταν σφαιρική, θα μπορούσε κανείς να χρησιμοποιήσει τη σφαιρική γεωμετρία και τριγωνομετρία, κλάδο των μαθηματικών που είχε αναπτυχθεί από την αρχαιότητα. Στην πραγματικότητα, το σχήμα της γης είναι ελλειψοειδές εξογκωμένο στον ισημερινό και πεπλατυσμένο στους πόλους.

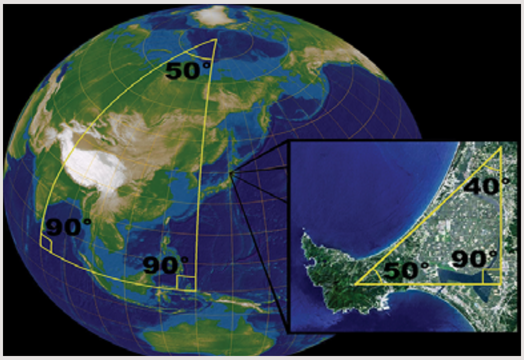
Η μαθηματική συμβολή του Gauss στο πρόβλημα της χαρτογράφησης ήταν η τελειοποίηση των μαθηματικών εργαλείων με σκοπό να απαντήσει στο ερώτημα: ***Πως μπορεί κάποιος να διαπιστώσει τη μορφή μιας επιφάνειας με μετρήσεις πάνω σε αυτήν;***

Κατέληξε στον ορισμό ενός μεγέθους που το ονόμασε ***καμπυλότητα****, το οποίο μπορεί να βρεθεί με μετρήσεις που γίνονται πάνω στην επιφάνεια που μελετάμε και μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή.*



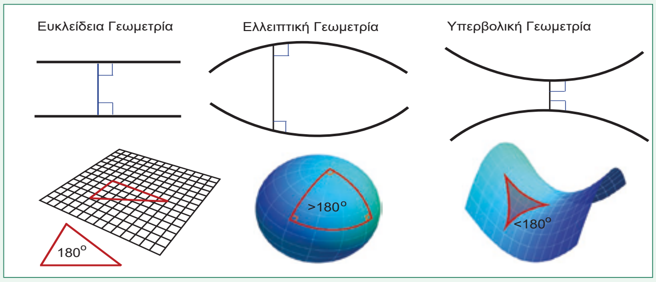
*Υπάρχουν επιφάνειες όπου σε όλα τα σημεία τους έχουν μηδενική καμπυλότητα, όπως το επίπεδο ή η παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου. Υπάρχουν επιφάνειες με θετική καμπυλότητα, όπως η σφαίρα. Υπάρχουν επιφάνειες με αρνητική καμπυλότητα, όπως μία γεωμετρική μορφή που ονομάστηκε αργότερα **ψευδοσφαίρα**. Τέλος, υπάρχουν επιφάνειες που δεν έχουν σταθερή καμπυλότητα, αλλά από σημείο σε σημείο μπορεί να αλλάξει η τιμή της. Για αυτό και χαρακτήριζε το μέγεθος αυτό ως τοπικό χαρακτηριστικό της επιφάνειας.*
Αλλά, για να έρθουμε και πάλι στο αρχικό ερώτημα, τι σχέση έχουν όλα αυτά με το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου;

Δραστηριότητα



Πάρτε ένα μπαλόνι που, όταν το φουσκώσουμε, να γίνεται όσο το δυνατό μία σφαίρα. Πριν το φουσκώσουμε, ζωγραφίστε πάνω του ένα τρίγωνο. Το τρίγωνο ζωγραφισμένο πάνω στην επίπεδη επιφάνεια του μπαλονιού θα έχει πράγματι άθροισμα γωνιών ίσο με 180°. Φουσκώστε τώρα το μπαλόνι. Οι πλευρές του τριγώνου θα κυρτωθούν, αφού ακολουθούν τη διαμόρφωση της σφαιρικής επιφάνειας του μπαλονιού. Τώρα, πόσο λέτε ότι θα είναι το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου; Εναλλακτικά μπορείτε να πάρετε μία υδρόγειο σφαίρα και να ζωγραφίσετε ένα τρίγωνο με άθροισμα γωνιών 270°!
Πως; Απλά ακολουθείστε τον ισημερινό ως βάση και για τις άλλες πλευρές δύο μεσημβρινούς κάθετους μεταξύ τους.

Ο Gauss λοιπόν έδειξε ότι:
*Αν η επιφάνεια στην οποία έχουμε σχεδιάσει το τρίγωνο **έχει θετική καμπυλότητα, τότε το** άθροισμα των γωνιών του τριγώνου **είναι μεγαλύτερο των 180°**.*
*Αν η επιφάνεια στην οποία έχουμε σχεδιάσει το τρίγωνο **έχει αρνητική καμπυλότητα, τότε το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι μικρότερο των 180°**.*
*Αν η επιφάνεια στην οποία έχουμε σχεδιάσει το τρίγωνο **έχει μηδενική καμπυλότητα, τότε το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι ίσο με 180°.***
Συγχρόνως, συνέδεσε τη μελέτη του αυτή με την αμφισβήτηση του 5ου αιτήματος του Ευκλείδη και κατέληξε στα συμπεράσματα:



- *στην **Ευκλείδεια Γεωμετρία** όπου ισχύει το 5ο αίτημα ή κάποιο ισοδύναμό του, όπως το απλό «από ένα σημείο εκτός ευθείας μία μόνη παράλληλη μπορούμε να φέρουμε προς αυτήν» **το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180°.***
- *στη Γεωμετρία που μπορούμε να θεμελιώσουμε με το αίτημα «από σημείο εκτός ευθείας καμιά παράλληλη δεν μπορούμε να φέρουμε προς αυτήν» (ελλειπτική γεωμετρία) **το άθροισμα των γωνιών είναι μεγαλύτερο των 180°**.*
- *στη Γεωμετρία όπου το αίτημα μας διατυπώνεται ως «από σημείο εκτός ευθείας άπειρες παράλληλες ευθείες μπορούμε να φέρουμε προς αυτήν» (υπερβολική γεωμετρία) **το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο των 180°**.*

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

1. Βασικά αξιώματα

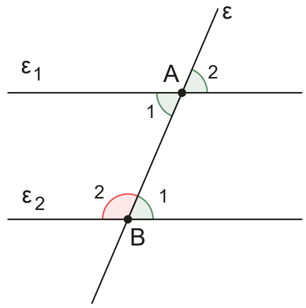
Από δύο σημεία ορίζεται μία ευθεία.
Από σημείο εκτός ευθείας μπορούμε να φέρουμε μία παράλληλη προς αυτήν.

2. Παράλληλες ευθείες

Δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη που σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες είναι παράλληλες.
Δύο παράλληλες ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός και εναλλάξ γωνίες ίσες.

Γωνίες που σχηματίζονται από δύο παράλληλες και μία τέμνουσά τους

Αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και ε μία τέμνουσα, τότε σχηματίζονται τα εξής ζεύγη γωνιών:



Ονομασία	Σχέση
Εντός εναλλάξ	**π.χ.** $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$
Εντός και επί τα αυτά	**π.χ.** $\hat{A}_1 + \hat{B}_2 = 180^\circ$
Εντός εκτός και επί τα αυτά	**π.χ.** $\hat{B}_1 = \hat{A}_2$

3. Γωνίες στο τρίγωνο και στο κυρτό ν-γωνο

Α) Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με 180°. Δηλαδή $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$.

Β) Η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών.
Δηλαδή $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = \hat{B} + \hat{A}$.

Γ) Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού ν-γώνου είναι ίσο με $S_\nu = (\nu - 2) \cdot 180^\circ$.

Ειδικά στο τετράπλευρο το άθροισμα των γωνιών του είναι ίσο με 360°.

Δ) Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός κυρτού ν-γώνου είναι ίσο με 360°.

Ε) Δύο οξείες (αμβλείες) γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες είναι ίσες μεταξύ τους.

ΣΤ) Δύο οξείες (αμβλείες) γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΦΥΛΛΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

1. Να χαρακτηρίσετε ως Σωστές ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις δικαιολογώντας σύντομα την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

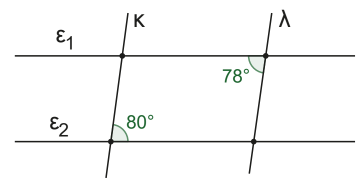
Α. Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με $180°$.

Β. Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες τους ίσες, τότε είναι παράλληλες.

Γ. Υπάρχει κυρτό πολύγωνο με άθροισμα γωνιών ίσο με $900°$.

Δ. Αν για τις γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $\hat{A} = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{\Gamma}}{3}$ τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

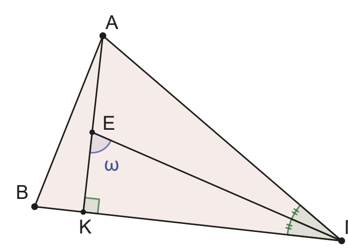
Ε. Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και δύο ευθείες κ και λ που τις τέμνουν. Αν σχηματίζονται οι σημειωμένες γωνίες, τότε οι κ και λ είναι παράλληλες.



2. Αποδεικτική άσκηση (Μονάδες 5)

Στο διπλανό τρίγωνο έχουμε φέρει το ύψος ΑΚ και τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Gamma}$ που τέμνονται στο σημείο Ε.

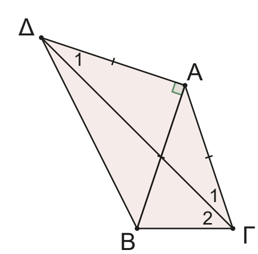
Να αποδείξετε ότι $\omega = \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}$.



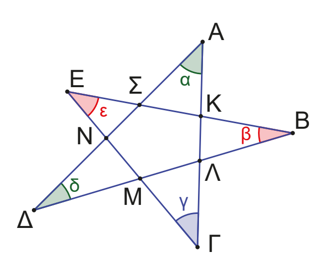
3. Υπολογιστική άσκηση (Μονάδες 5)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΒ (ΑΔ = ΑΒ).

Να αποδείξετε ότι $\hat{\Gamma}_2 = 45°$.



Εργασία για το σπίτι



Σχεδιάστε ένα αστέρι σαν αυτό του διπλανού σχήματος.
Υπολογίστε το άθροισμα $\hat{\alpha}+\hat{\beta}+\hat{\gamma}+\hat{\delta}+\hat{\varepsilon}$ των γωνιών του αστεριού που φτιάξατε.

Αναρωτηθείτε τι συμβαίνει στην περίπτωση που το αστέρι είναι εξάκτινο;

Τι συμβαίνει σε ένα αστέρι με επτά ακτίνες.

Συμπλήρωσε τον διπλανό πίνακα.
Σε ποιο γενικό συμπέρασμα μπορείτε να καταλήξετε;
Τι συμβαίνει, δηλαδή, αν οι ακτίνες είναι 100 ή 1000 ή γενικά ν όπου ν ένας οποιασδήποτε φυσικός αριθμός.

Αποδείξτε την εικασία σας!

Αριθμός ακτίνων αστεριού	Άθροισμα γωνιών
5	
6	
7	
8	
9	

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Ισότητα τριγώνων

2.1
Ίσα τρίγωνα

Τι καινούργιο υπάρχει στην παράγραφο

Στις παρακάτω σελίδες:

- μαθαίνουμε πότε λέμε δύο τρίγωνα ίσα,
- θυμόμαστε τα κριτήρια ισότητας δύο τριγώνων,
- θυμόμαστε τα κριτήρια ισότητας δύο ορθογώνιων τριγώνων,
- ανακαλύπτουμε τις ιδιότητες των στοιχείων ενός ισοσκελούς τριγώνου,
- μαθαίνουμε τα κριτήρια για να είναι ένα τρίγωνο ισοσκελές,
- κατασκευάζουμε τρίγωνα με δεδομένα κάποια από τα κύρια στοιχεία τους (γωνίες, πλευρές).

Από τα βασικά προβλήματα που έχουν να αντιμετωπίσουν οι χαρτογράφοι είναι το ανάγλυφο της περιοχής, η ύπαρξη φυσικών εμποδίων και βεβαίως να αποδώσουν σωστά αποστάσεις και διευθύνσεις. Η μέθοδος που εφαρμόζουν λέγεται τριγωνισμός και αποσκοπεί στον χωρισμό της επιφάνειας σε τρίγωνα, όπου έχουν μετρηθεί κατάλληλα αποστάσεις, αλλά και γωνίες. Οι μετρήσεις γίνονται με τοπογραφικά όργανα μέτρησης. Ο διπλανός χάρτης της Πελοποννήσου είναι αποτέλεσμα τριγωνισμού και έχει γίνει στα μέσα του 19ου αιώνα.

Ποιες, όμως, είναι οι ελάχιστες μετρήσεις που πρέπει να γίνουν σε ένα τρίγωνο, ώστε μετά να μπορέσουμε να το σχεδιάσουμε σε ένα φύλλο χαρτί;

Απαραίτητες γνώσεις

Δύο σχήματα, επομένως, και δύο τρίγωνα θα τα λέμε ίσα, όταν τοποθετώντας τα το ένα πάνω στο άλλο εφαρμόζουν πλήρως (συμπίπτουν).

Προφανώς δύο ίσα τρίγωνα θα έχουν:

- τις πλευρές και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.
- απέναντι από ίσες πλευρές, ίσες γωνίες και αντίστροφα.

Οι ίσες πλευρές που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες λέγονται **αντίστοιχες**.

Δραστηριότητα

Ο καθηγητής των μαθηματικών σχεδίασε ένα τρίγωνο ΑΒΓ στον πίνακα και κάλεσε τους μαθητές να μετρήσουν κάποιες πλευρές ή γωνίες, ώστε μετά να είναι σε θέση να το σχεδιάσουν σε φύλλο σχεδίασης στο σπίτι τους.

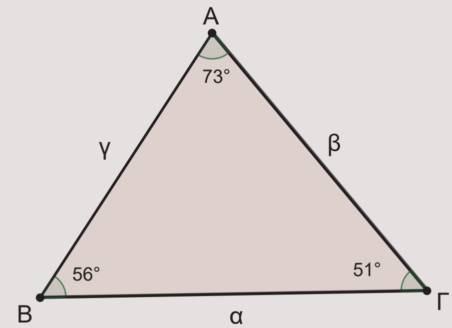
Ο 1ος μαθητής μέτρησε τις πλευρές α = 9, β = 8 και γ = 7.

Ο 2ος μαθητής μέτρησε τις πλευρές α = 9, γ = 7 και τη γωνία $\hat{B} = 56^o$.

Ο 3ος μαθητής μέτρησε την πλευρά $\beta = 8$ και τις γωνίες $\hat{\Gamma} = 51^o$ και $\hat{A} = 73^o$.

Ο 4ος μαθητής μέτρησε τη γωνία $\hat{A} = 73^o$ και τις πλευρές β = 8 και α = 9.

Ο 5ος μαθητής μέτρησε τις γωνίες $\hat{A} = 73^o$, $\hat{B} = 56^o$ και $\hat{\Gamma} = 51^o$.



Μοιραστείτε σε πέντε ομάδες, όπου η κάθε μία θα προσπαθήσει χρησιμοποιώντας χάρακα, μοιρογνωμόνιο και διαβήτη να σχεδιάσει σε διαφανές χαρτί τρίγωνο με βάση τα στοιχεία που μέτρησε το κάθε ένα από τα πέντε παιδιά. Την τελική σας κατασκευή να τη συγκρίνετε με το τρίγωνο που σχεδίασε ο καθηγητής. Το τρίγωνο σας εφαρμόζει ακριβώς στο τρίγωνο του καθηγητή;

Ποιες τελικά είναι οι σωστές μετρήσεις;

Ας δούμε τι έχει προκύψει

Θα διαπιστώσατε ότι, από τις πέντε μετρήσεις, οι τρεις πράγματι μας οδηγούν σε κατασκευή τριγώνου ίσου με το δοσμένο. Οι προτάσεις που μας λένε ποια κύρια στοιχεία αρκεί να έχουν ίσα δύο τρίγωνα ώστε να είναι ίσα, λέγονται **κριτήρια ισότητας** τριγώνων.

Α. Κριτήρια ισότητας τριγώνων

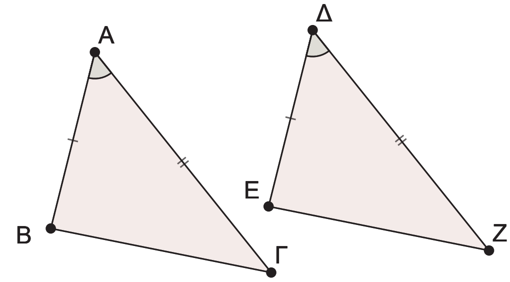
Κριτήριο ΠΓΠ ***(«Πλευρά - Γωνία - Πλευρά»)***. (Σχ.1)

Δύο τρίγωνα που έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις **περιεχόμενες** σε αυτές γωνίες ίσες, είναι ίσα.

Για παράδειγμα, τα διπλανά τρίγωνα είναι ίσα διότι έχουν

$AB = \Delta E$, $A\Gamma = \Delta Z$ και $\hat{A} = \hat{\Delta}$.

Οπότε θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους, ένα προς ένα, ίσα. Δηλαδή, θα έχουν ίσες τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές τους, άρα $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$ και ΒΓ = ΕΖ.



Σχήμα 1

Δραστηριότητα

(Θα χρησιμοποιήσουμε μοιρογνωμόνιο και χάρακα).

Σχεδιάστε τρίγωνο ΑΒΓ με α = 6 cm, β = 8 cm και $\hat{\Gamma} = 60°$.

Συγκρίνετε το τρίγωνο που φτιάξατε με αυτό που σχεδίασαν οι συμμαθητές σας.

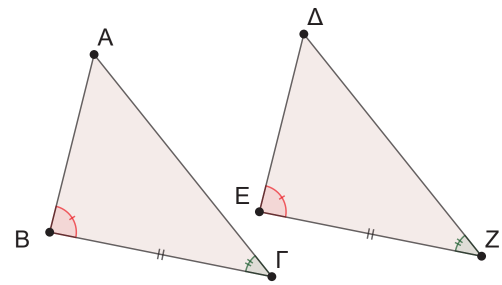
Ανοίξτε το αρχείο GeoGebra, μετακινήστε σημεία και διαπιστώστε ότι τα τρίγωνα μπορούν να τοποθετηθούν ακριβώς το ένα πάνω στο άλλο.

Κριτήριο ΓΠΓ *(«Γωνία - Πλευρά - Γωνία»).* (Σχ.2)

Δύο τρίγωνα που έχουν μία πλευρά και τις **προσκείμενες** σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, είναι ίσα.

Για παράδειγμα, τα διπλανά τρίγωνα είναι ίσα, διότι έχουν $ΒΓ = ΕΖ$, $\hat{B} = \hat{E}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$.

Οπότε θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους, ένα προς ένα, ίσα. Δηλαδή, θα έχουν ίσες τις πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες τους, άρα ΑΒ = ΔΕ, ΑΓ = ΔΖ και $\hat{A} = \hat{\Delta}$.



Σχήμα 2

Δραστηριότητα

(Θα χρησιμοποιήσουμε μοιρογνωμόνιο και χάρακα).

Σχεδιάστε τρίγωνο ΑΒΓ με α = 6 cm, $\hat{B} = 40°$ και $\hat{\Gamma} = 60°$

Συγκρίνετε το τρίγωνο που φτιάξατε με αυτό που σχεδίασαν οι συμμαθητές σας.

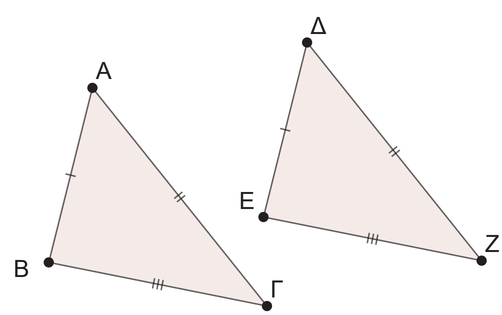
Ανοίξτε το αρχείο GeoGebra, μετακινήστε σημεία και διαπιστώστε ότι τα τρίγωνα μπορούν να τοποθετηθούν ακριβώς το ένα πάνω στο άλλο.

Κριτήριο ΠΠΠ *(«Πλευρά-Πλευρά-Πλευρά»).* (Σχ.3)

Δύο τρίγωνα που έχουν τις τρεις πλευρές τους μία προς μία ίσες, είναι ίσα.

Για παράδειγμα, τα διπλανά τρίγωνα είναι ίσα, διότι έχουν ΑΒ = ΔΕ, $ΒΓ = ΕΖ$, $ΑΓ = ΔΖ$.

Οπότε θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους, ένα προς ένα, ίσα. Δηλαδή, θα έχουν ίσες τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές τους, άρα $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $\hat{B} = \hat{E}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$.



Σχήμα 3

Ο Ευκλείδης ξεκίνησε τη μελέτη της Γεωμετρίας χρησιμοποιώντας τα απλούστερα των σχημάτων, την ευθεία και τον κύκλο. Επομένως, είναι λογικό να αναζητά λύσεις στα διάφορα προβλήματα που αντιμετώπιζε, χρησιμοποιώντας εκείνα τα γεωμετρικά όργανα που παράγουν τα σχήματα αυτά. Άρα, η κατασκευή με τη βοήθεια κανόνα (χάρακα) και διαβήτη αποτελεί, κατά κάποιον τρόπο, απόδειξη υπάρξεως της λύσης, αφού χρησιμοποιούμε μόνο ευθείες και κύκλους. Δηλαδή, γραμμές που πάντα κατασκευάζονται σύμφωνα με τα αιτήματα. Για αυτόν το λόγο, στα επόμενα, όταν θα λέμε «**κατασκευάστε…**», θα ακολουθούμε την Ευκλείδεια παράδοση και θα χρησιμοποιούμε μόνο διαβήτη και κανόνα σε αντιδιαστολή με την έκφραση «**σχεδιάστε…**» όπου χρησιμοποιούμε και άλλα γεωμετρικά όργανα.

Δραστηριότητα

(Θα χρησιμοποιήσουμε διαβήτη και κανόνα).

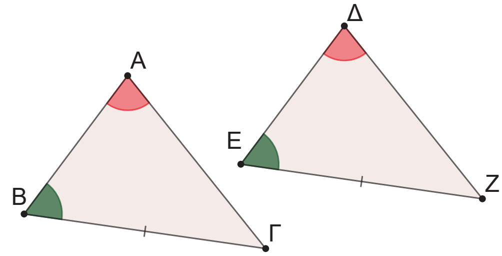
Κατασκευάστε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α = 7 cm, β = 6cm και γ = 5cm.

Συγκρίνετε το τρίγωνο που κατασκευάσατε με αυτό των συμμαθητών σας.

Ανοίξτε το αρχείο GeoGebra, μετακινήστε τα σημεία και διαπιστώστε ότι τα τρίγωνα μπορούν να τοποθετηθούν ακριβώς το ένα πάνω στο άλλο.

Επειδή το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180^o, μπορούμε να διατυπώσουμε και ένα άλλο κριτήριο ισότητας τριγώνων, το εξής:

Δύο τρίγωνα που έχουν μία πλευρά, την απέναντι και μία προσκείμενη σε αυτήν γωνίες ίσες μία προς μία, θα είναι ίσα. (Σχ.4)



Σχήμα 4

Βασιζόμενοι στα τρία κριτήρια ισότητας δύο τριγώνων, να δικαιολογήσετε την αλήθεια του ισχυρισμού αυτού.

Δραστηριότητα κατανόησης

Γιατί δεν είναι κριτήριο ισότητας η πρόταση.

«Δύο τρίγωνα που έχουν δύο πλευρές τους ίσες, μία προς μία και μία οποιαδήποτε γωνία του ενός ίση με μία γωνία του άλλου, είναι ίσα». (Θα χρησιμοποιήσουμε χάρακα και μοιρογνωμόνιο).

Σχεδιάστε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 30°$, β = 6 cm και α = 4 cm.

Για την κατασκευή, θα βοηθηθείτε ανοίγοντας το αρχείο GeoGebra και μετακινώντας τα σημεία. Τελικά, πόσα τρίγωνα μπορούμε να κατασκευάσουμε με τα στοιχεία αυτά;

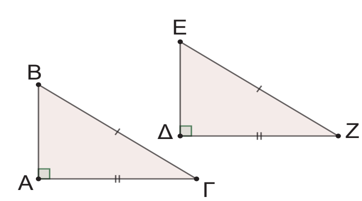
Β. Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων

Με βάση τα κριτήρια ισότητας που έχουμε ήδη αναφέρει, δύο ορθογώνια τρίγωνα θα είναι ίσα όταν έχουν:

- Τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία. (Γιατί;)
- Μία κάθετη πλευρά και την προσκείμενη οξεία γωνία ίση. (Γιατί;)
- Μία κάθετη πλευρά και την απέναντι οξεία γωνία ίση. (Γιατί;)
- Την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίση. (Γιατί;)

Επιπλέον, ισχύει και το εξής

Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά τους ίσες μία προς μία είναι ίσα. (Σχ.5)



Σχήμα 5

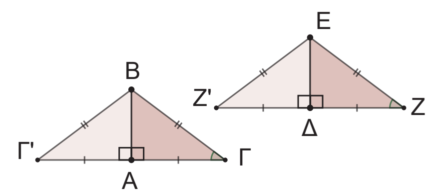
Δηλαδή, τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ που έχουν ΒΓ = ΕΖ και ΑΓ = ΔΖ θα είναι ίσα. Γιατί να ισχύει η πρόταση αυτή; Με τα δεδομένα που έχουμε δεν εφαρμόζεται κανένα από τα γνωστά κριτήρια. Πρέπει να παρέμβουμε στο σχήμα και να φέρουμε βοηθητικές ευθείες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Στο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε την πλευρά ΓΑ προς το Α και θεωρούμε σημείο Γ΄, τέτοιο ώστε ΑΓ = ΑΓ΄. (Σχ.6) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΓ΄ είναι ίσα, διότι έχουν ΑΒ κοινή πλευρά, ΑΓ = ΑΓ΄ και $B\hat{A}\Gamma = B\hat{A}\Gamma' = 90^o$.

Άρα, από κριτήριο ΠΓΠ είναι ίσα. Οπότε θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα. Άρα, θα είναι και Γ΄Β = ΓΒ. Όμοια, αν προεκτείνουμε την πλευρά ΔΖ του ΔΕΖ προς το Δ και θεωρήσουμε σημείο Ζ΄ τέτοιο ώστε ΔΖ΄=ΔΖ, συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΔΕΖ και ΔΕΖ΄, θα καταλήξουμε στο ότι Ζ΄Ε = ΕΖ.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα Γ΄ΒΓ και Ζ΄ΕΖ. Αυτά έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία, άρα θα είναι ίσα. Οπότε θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, άρα θα είναι $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$. Οπότε τελικά, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν: ΒΓ=ΕΖ, ΑΓ=ΔΖ και $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$. Άρα, από κριτήριο ΠΓΠ, είναι ίσα. ■



Σχήμα 6

Οπότε δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν:

- **Δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία, ή**
- **μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.**

Δραστηριότητα

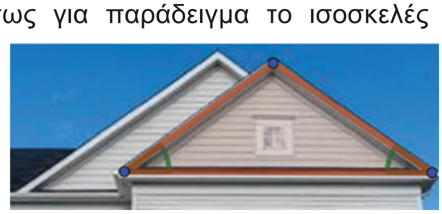
Ο μαθηματικός **Gaspard Monge** συνόδεψε τον Ναπολέοντα στην εκστρατεία του στην Αίγυπτο. Εκεί η ιστορία λέει ότι βρέθηκε μπροστά σε ένα ποτάμι και ο Ναπολέοντας προέτρεψε τον φίλο του να ανακαλύψει μία μέθοδο υπολογισμού του πλάτους του ποταμιού. Τότε ο Monge στράφηκε προς το ποτάμι και μετακίνησε το γείσο του στρατιωτικού καπέλου του, μέχρις ότου να βλέπει την άκρη της απέναντι όχθης.
Στην συνέχεια, γύρισε στρέφοντας την πλάτη του προς το ποταμό και είπε στον Ναπολέοντα να σταθεί στο σημείο, που έβλεπε τώρα στην άκρη του γείσου του καπέλου του. Ακολούθως, περπάτησε μέχρι το σημείο αυτό και ο αριθμός των βημάτων που έκανε ήταν συγχρόνως και το μήκος του ποταμού! Μπορείτε να σχηματοποιήσετε το γεγονός και να δικαιολογήσετε το δίκιο του μεγάλου Μαθηματικού;

Ερωτήσεις Σωστού - Λάθους

1. Δύο τρίγωνα που έχουν τις γωνίες τους μία προς μία ίσες, είναι πάντα ίσα.
2. Δύο τρίγωνα που έχουν μία πλευρά και δύο γωνίες ίσες μία προς μία, είναι πάντα ίσα.
3. Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν μία από τις οξείες γωνίες τους ίσες είναι ίσα.
4. Αν δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν $AB = \Delta E$, $A\Gamma = \Delta Z$, $\hat{B} = \hat{\Delta}$, $\hat{A} = \hat{Z}$, $\hat{\Gamma} = \hat{E}$, τότε είναι ίσα.
5. Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία είναι πάντα ίσα.

Σε τι χρησιμεύουν τα παραπάνω

Με τις γνώσεις που έχουμε αποκτήσει μπορούμε να μελετήσουμε αρκετά ενδιαφέροντα γεωμετρικά σχήματα, όπως για παράδειγμα το ισοσκελές τρίγωνο.
Το τρίγωνο αυτό είναι ένα χαρακτηριστικό σχήμα οικείο σε όλους, αφού ως μορφή το συναντάμε σχεδόν παντού γύρω μας.



Δραστηριότητα

Παρατηρήστε τις παραπάνω εικόνες.
Ανακαλύψτε τις «κρυμμένες» ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου.

Γ. Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου

1) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι παρά τη βάση γωνίες του (δηλαδή, οι γωνίες της βάσης του) είναι ίσες. (Σχ.7)

Σε κάθε άσκηση καλό είναι στην αρχή να ξεχωρίζουμε τις υποθέσεις - δεδομένα, από τα συμπεράσματα - ζητούμενα.

Δηλαδή, στην άσκηση που θα διαπραγματευτούμε έχουμε ως υπόθεση ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές και ως συμπέρασμα ότι οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι ίσες.

Επίσης, **για να αποδείξουμε ότι δύο ευθύγραμμα τμήματα ή δύο γωνιές είναι ίσες συνήθως βρίσκουμε δύο τρίγωνα που έχουν ως πλευρές ή ως γωνίες τους τα μεγέθη αυτά και τα συγκρίνουμε.**
Στο πρόβλημα που διαπραγματευόμαστε δεν υπάρχουν τρίγωνα να συγκριθούν!
Πρέπει να τα δημιουργήσουμε, δηλαδή να φέρουμε κάποια βοηθητική ευθεία.
Παρακάτω επιλέξαμε να φέρουμε το ύψος, όμως η απόδειξη μπορεί να γίνει φέροντας τη διχοτόμο ή τη διάμεσο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Υπόθεση	$AB = A\Gamma$ ($AB\Gamma$ ισοσκελές)
Συμπέρασμα	$\hat{B} = \hat{\Gamma}$

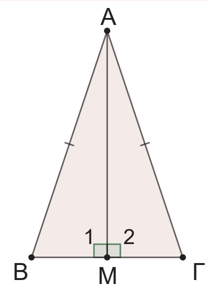
Φέρουμε το ύψος ΑΜ του $AB\Gamma$.
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ABM και $AM\Gamma$.

Έχουν $\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90°$ (επειδή ΑΜ ύψος)

$AB = A\Gamma$ (ΑΒΓ ισοσκελές)

$AM = AM$ (κοινή πλευρά)

Δηλαδή, είναι ορθογώνια που έχουν τις υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση, άρα είναι ίσα. Επομένως, θα έχουν και όλα τα υπόλοιπα αντίστοιχα κύρια στοιχεία τους ίσα ένα προς ένα. Άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. ■



Σχήμα 7

2) Αν σε ένα τρίγωνο δύο γωνίες του είναι ίσες τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές. (Σχ.9)

Η υπόθεση της πρότασης είναι ότι το τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες και το συμπέρασμα ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Παρατηρείστε ότι ανάμεσα στην πρόταση αυτή σε σχέση με την προηγούμενη, η υπόθεση έχει γίνει συμπέρασμα και το συμπέρασμα υπόθεση. Όταν έχουμε δύο τέτοιες προτάσεις την μία θα την λέμε **ευθεία** και την άλλη **αντίστροφη πρόταση**.

Υπόθεση	$\hat{B} = \hat{\Gamma}$
Συμπέρασμα	ΑΒΓ ισοσκελές

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

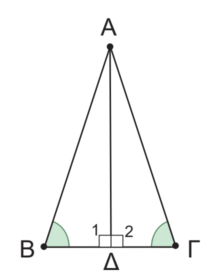
Φέρουμε το ύψος ΑΔ και συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ.

Έχουν ΑΔ = ΑΔ (κοινή πλευρά)

$\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90°$

$\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (από υπόθεση)

Άρα τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία κάθετη πλευρά και την απέναντι οξεία γωνία ίση, άρα θα είναι ίσα.
Οπότε θα έχουν και όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ένα προς ένα ίσα.
Άρα θα έχουν ΑΓ=ΑΒ, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. ■



Σχήμα 8

3) Σε ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση είναι διχοτόμος και ύψος. (Σχ.10)

Αποδειξη

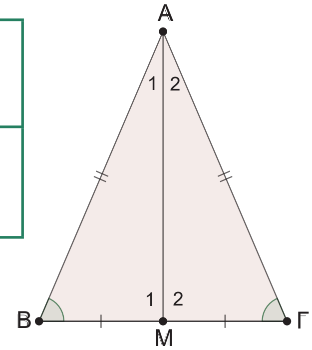
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΑΜΓ

Έχουν: ΑΒ = ΑΓ (ΑΒΓ ισοσκελές)

ΒΜ = ΜΓ (Μ μέσο)

ΑΜ = ΑΜ (κοινή πλευρά)

Υπόθεση	$AB = A\Gamma$, $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ $BM = M\Gamma$
Συμπέρασμα	$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ $\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^\circ$



Σχήμα 9

Δηλαδή, έχουν τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία, οπότε από κριτήριο ΠΠΠ θα είναι ίσα. Επομένως, θα έχουν όλα τα αντίστοιχά τους στοιχεία ίσα.

Άρα $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, οπότε η ΑΜ είναι διχοτόμος.

Επομένως, $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$, οπότε επειδή $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 180^\circ$ έχουμε τελικά ότι $\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^\circ$, άρα η ΑΜ είναι και ύψος. ■

4) Σε ισοσκελές τρίγωνο το ύψος που αντιστοιχεί στην βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος.

Να αποδειχθεί ως άσκηση.

5) Σε ισοσκελές τρίγωνο η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι ύψος και διάμεσος.

Να αποδειχθεί ως άσκηση.

Πολλές φορές παρατηρούμε ένα τρίγωνο και μοιάζει να είναι ισοσκελές. Ποιες μετρήσεις πρέπει να κάνουμε ώστε να είμαστε σίγουροι ότι είναι ισοσκελές;

Η προφανής απάντηση είναι να μετρήσουμε πλευρές ή γωνίες και να διαπιστώσουμε ότι έχει δύο πλευρές ή δύο γωνίες ίσες. Υπάρχουν άλλα κριτήρια;

Δ. Κριτήρια για να είναι ένα τρίγωνο ισοσκελές

1) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι αν η ΑΜ είναι ύψος και διάμεσος, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ θα είναι ισοσκελές με βάση την ΒΓ. (Σχ.10)

Αποδειξη

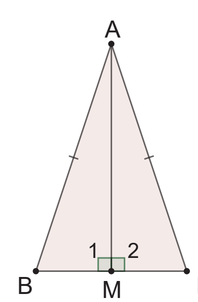
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΜΓ αυτά έχουν:

$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ $(= 90^\circ$, ΑΜ ύψος)

ΒΜ = ΜΓ (Μ μέσο)

ΑΜ = ΑΜ (κοινή πλευρά)

Υπόθεση	$\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^\circ$ $BM = M\Gamma$
Συμπέρασμα	ΑΒΓ ισοσκελές



Σχήμα 10

Δηλαδή, έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνιές ίσες, άρα από κριτήριο ΠΓΠ θα είναι ίσα.

Οπότε θα έχουν όλα τα αντίστοιχά τους στοιχεία ίσα.

Άρα ΑΒ = ΑΓ, από όπου συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. ■

2) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι, αν η ΑΔ είναι ύψος και διχοτόμος, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ θα είναι ισοσκελές με βάση την ΒΓ.

Να αποδειχθεί ως άσκηση.

3) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι, αν η ΑΔ είναι διχοτόμος και διάμεσος, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ θα είναι ισοσκελές με βάση την ΒΓ (Σχ.11).

Αν προσπαθήσουμε να αποδείξουμε τη συγκεκριμένη πρόταση συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ, όπως κάναμε πριν, θα διαπιστώσουμε ότι δεν είμαστε σε θέση να δικαιολογήσουμε την ισότητα των τριγώνων στηριζόμενοι σε κάποιο κριτήριο.

Αν κάποιος ασχοληθεί αρκετά με τη Γεωμετρία θα ανακαλύψει κάποιες στοιχειώδεις κινήσεις – μεθόδους που βοηθούν. Η μεθοδολογία, λοιπόν, στη Γεωμετρία δεν είναι παρά συσσωρευμένη εμπειρία που στην αρχή τη δανειζόμαστε, αλλά πάντα το ζητούμενο είναι να ανακαλύψουμε τις δικές μας τεχνικές. Αυτό γίνεται με τη λύση αρκετών ασκήσεων, αλλά και με το να προσπαθούμε να αντιμετωπίζουμε τις ασκήσεις ανακαλύπτοντας και άλλους τρόπους λύσης.

Προσπαθήστε να αποδείξετε την πρόταση ακολουθώντας την εξής υπόδειξη:

Προεκτείνετε την ΑΔ κατά ίσο τμήμα ΔΜ. Αποδείξτε ότι:

1. τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΔΓΜ είναι ίσα και
2. ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

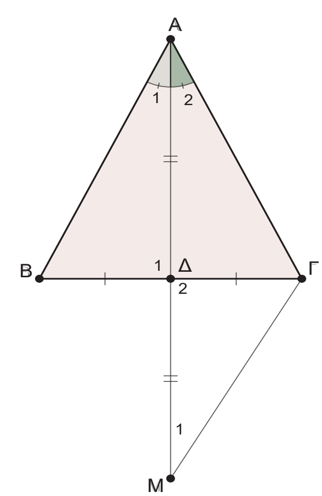
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα:
ΑΔΒ και ΔΓΜ αυτά έχουν:

$\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ (κατακορυφήν)

$B\Delta = \Delta\Gamma$ (Δ μέσο)

$A\Delta = \Delta M$ (κατασκευή)

Υπόθεση	$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, ΒΔ = ΔΓ, ΑΔ = ΔΜ
Συμπέρασμα	$AB\Delta = M\Delta\Gamma$ ΑΒΓ ισοσκελές



Σχήμα 11

Δηλαδή, έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνιές ίσες.

Οπότε από κριτήριο (ΠΓΠ) είναι ίσα. Επομένως, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ένα προς ένα ίσα.

Έτσι $AB = M\Gamma$ (1) και $\hat{A}_1 = \hat{M}_1$.

Επειδή όμως $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ θα είναι και $\hat{A}_2 = \hat{M}_1$ (2).

Οπότε το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές (έχει δύο γωνίες ίσες),
άρα $M\Gamma = A\Gamma$ (3).

Επομένως έχουμε: $\left.\begin{aligned} AB = M\Gamma \ \ (1) \\ M\Gamma = A\Gamma \ \ (3) \end{aligned}\right\} \Rightarrow AB = A\Gamma$, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. ■

Όλες οι προτάσεις που αναφέραμε στις προηγούμενες σελίδες μπορούμε να τις χρησιμοποιούμε για τη λύση άλλων ασκήσεων χωρίς να τις αποδεικνύουμε. Άρα:
Όταν έχουμε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), τότε είναι πλέον γνωστό ότι:

α) οι γωνίες της βάσης του είναι ίσες,
β) το ύψος που άγεται από την κορυφή είναι και διάμεσος και διχοτόμος,
γ) η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι και ύψος και διάμεσος,
δ) η διάμεσος που άγεται από την κορυφή είναι και ύψος και διχοτόμος.

Όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές τότε αρκεί:

α) να έχει δύο πλευρές ίσες,
β) να έχει δύο γωνίες ίσες,
γ) η διάμεσος που άγεται από μία κορυφή είναι και ύψος ή διχοτόμος,
δ) το ύψος που άγεται από μία κορυφή είναι και διάμεσος ή διχοτόμος,
ε) η διχοτόμος που άγεται από μία κορυφή είναι και διάμεσος ή ύψος.

Παραδειγματα

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε τη σημασία που έχει στη γεωμετρία το μεγάλο και καθαρό σχήμα. Καθώς διαβάζουμε την άσκηση πρέπει:

- να σχεδιάζουμε ό,τι η εκφώνηση της άσκησης υποδεικνύει,
- να σημειώνουμε κάθε πληροφορία στο σχήμα μας,
- όταν έχουμε φέρει παράλληλες, ας τις χρωματίζουμε, γιατί είναι πιθανόν να τις χρησιμοποιήσουμε για σύγκριση γωνιών,
- και τέλος, να σημειώνουμε τις υποθέσεις και τα συμπεράσματα του προβλήματος.

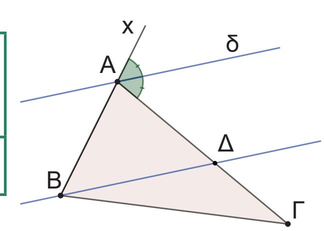
Ας τα δούμε αυτά στην πράξη.

1. Στο παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ έχουμε προεκτείνει την πλευρά του ΒΑ προς το Α, και έχουμε φέρει τη διχοτόμο Αδ της γωνίας $\Gamma\hat{A}x$ που σχηματίζεται. Από την κορυφή Β φέρουμε ΒΔ || Αδ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Δ. Να αποδείξετε ότι ΔΓ = ΑΓ – ΑΒ.

Λυση

Ανακαλούμε τις γνώσεις που έχουμε και σχετίζονται με τις υποθέσεις της άσκησης.

Υπόθεση	Αδ διχοτόμος ΒΔ || Αδ
Συμπέρασμα	ΔΓ = ΑΓ – ΑΒ

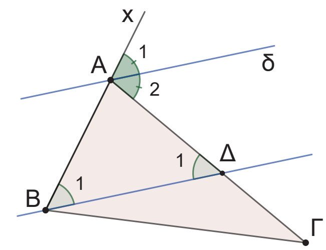


Για το παράδειγμά μας η πληροφορία:
διχοτόμος σημαίνει ίσες γωνίες, ενώ παράλληλες ευθείες σε συνδυασμό με μία τέμνουσα μας επιτρέπουν να συγκρίνουμε γωνίες.

Μετά χαράζουμε μία **στρατηγική επίλυσης** της άσκησης, εφαρμόζοντας συνδυαστική λογική.

Για το παράδειγμά μας, μπορούμε να δούμε ότι το τμήμα ΔΓ γράφεται από το σχήμα ΔΓ = ΑΓ – ΑΔ , άρα για να δείξουμε το ζητούμενο προφανώς θα πρέπει να δείξουμε ότι ΑΒ = ΑΔ ή ισοδύναμα ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.

Πως δείχνουμε ότι ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές;
Θυμηθείτε τι έχουμε αναφέρει.
Μετά από όλα αυτά η λύση της άσκησης μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής:
Ισχύει ότι:



$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \dfrac{\hat{A}_{\varepsilon\xi}}{2}$ (1)

$\hat{B}_1 = \hat{A}_1$ (2) ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των $A\delta \parallel B\Delta$ που τέμνονται από την ΑΒ

$\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_2$ (3) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $A\delta \parallel B\Delta$ που τέμνονται από την ΑΔ.

Από (1),(2) και (3) έχουμε ότι $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$ επομένως, το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, άρα $AB = A\Delta$.

Οπότε έχουμε $\Delta\Gamma = A\Gamma - A\Delta = A\Gamma - AB$.

2. **Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ. Αν ο κύκλος (Δ, ΔΒ) τέμνει τη ΒΓ στο Ε, να αποδείξετε ότι $\Delta E \parallel A\Gamma$.**

Λυση

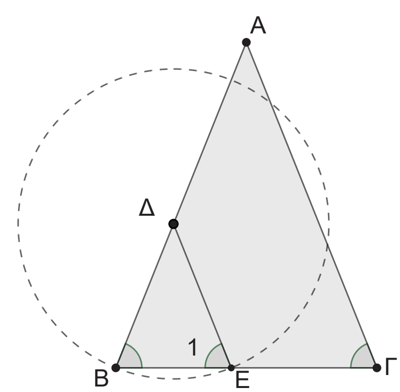
Ανακαλούμε τις γνώσεις που έχουμε και σχετίζονται με τις υποθέσεις της άσκησης:

ΑΒΓ ισοσκελές: άρα $AB = A\Gamma$, $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Χαράσσουμε μία στρατηγική επίλυσης της άσκησης, εφαρμόζοντας συνδυαστική λογική.

Για να αποδείξουμε ότι δύο ευθείες είναι παράλληλες, δείχνουμε ότι οι σχηματιζόμενες εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες (ή οποιοδήποτε άλλο ζεύγος γωνιών που σχηματίζονται από τις ευθείες και κάποια τέμνουσα) ή ότι είναι κάθετες στην ίδια ευθεία. Άρα, θα προσπαθήσουμε να δείξουμε ότι $\hat{E}_1 = \hat{\Gamma}$.

Υπόθεση	ΑΒΓ ισοσκελές Κύκλος (Δ,ΔΒ)
Συμπέρασμα	$\Delta E \parallel A\Gamma$

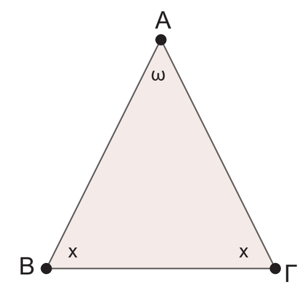


Έχουμε διαδοχικά ότι:
Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (1)
$\Delta B = \Delta E$ ως ακτίνες κύκλου, άρα το ΒΔΕ τρίγωνο είναι ισοσκελές, άρα $\hat{B} = \hat{E}_1$ (2).

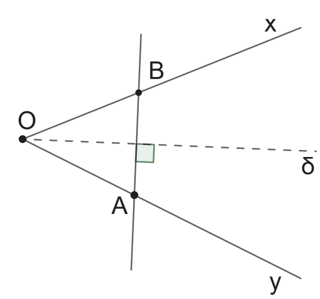
Από (1) και (2) έχουμε ότι $\hat{\Gamma} = \hat{E}_1$, οπότε είναι $\Delta E \parallel A\Gamma$, διότι οι ευθείες αυτές τεμνόμενες από την ΕΓ σχηματίζουν δύο εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες.

Ερωτήσεις κατανόησης

1. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο η γωνία της κορυφής είναι 120°. Πόσες μοίρες είναι οι γωνίες της βάσης του;
2. Στο ισόπλευρο τρίγωνο πόσες μοίρες είναι η κάθε γωνία του;
3. Στο διπλανό ισοσκελές τρίγωνο, δικαιολογείστε ότι ισχύει η ισότητα $x = 90^\circ - \frac{\omega}{2}$.



4. Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γωνία $x\hat{O}y$, τη διχοτόμο της Οδ και μία ευθεία κάθετη της διχοτόμου, που τέμνει τις πλευρές της γωνίας στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τι τρίγωνο είναι το ΑΟΒ και γιατί;



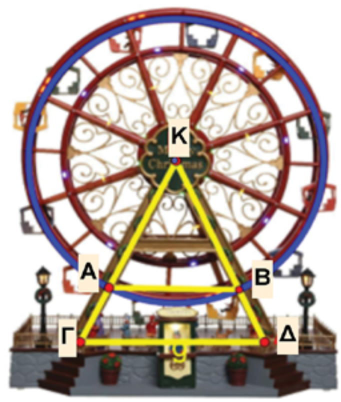
5. Δύο ισόπλευρα τρίγωνα που έχουν μία πλευρά τους ίση, είναι ίσα;
6. Σε ισοσκελές τρίγωνο μία από τις ίσες γωνίες του μπορεί να είναι αμβλεία;
7. Σε ισοσκελές τρίγωνο κάθε ύψος του είναι και διχοτόμος του;
8. Σε ποια περίπτωση δύο ισοσκελή τρίγωνα, που έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία, είναι ίσα;

Ασκήσεις

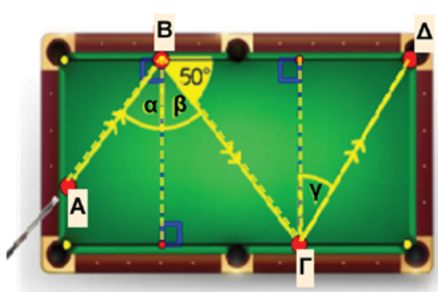
1. Στην παρακάτω ρόδα ενός λούνα παρκ ισχύουν τα εξής: $A\hat{K}B = 50^\circ$ και $A\Gamma = B\Delta$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $K\hat{A}B$, $K\hat{B}A$, $K\hat{\Gamma}\Delta$, $K\hat{\Delta}\Gamma$.

β) Να αποδείξετε ότι $AB \parallel \Gamma\Delta$.

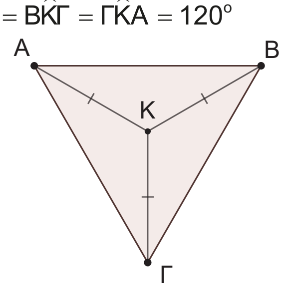


2. Κατά το χτύπημα μίας μπάλας μπιλιάρδου, γνωρίζουμε ότι η γωνία πρόσπτωσης και η γωνία ανάκρουσης είναι ίσες. Αν $\Gamma\hat{B}\Delta = 50^\circ$, υπολογίστε τη γωνία $\hat{\gamma}$, ώστε η μπάλα από τη θέση Α να καταλήξει στην τρύπα Δ.



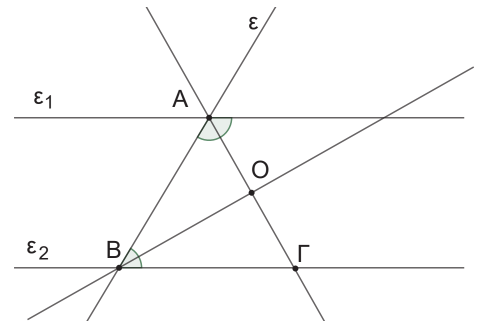
3. Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ και το εσωτερικό σημείο Κ, ώστε να ισχύουν:

- $KA = KB = K\Gamma$
- $A\hat{K}B = B\hat{K}\Gamma = \Gamma\hat{K}A = 120^\circ$



Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

4. Έστω $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και ε μία τρίτη ευθεία που τις τέμνει στα σημεία Α, Β. Φέρουμε τις διχοτόμους, δύο εντός και επί τα αυτά γωνιών,όπως στο σχήμα.



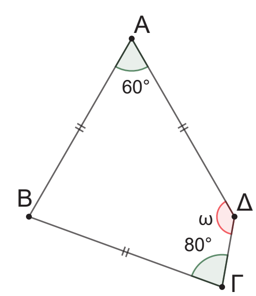
Αν η διχοτόμος της $\hat{A}$ τέμνει την ε_2 στο σημείο Γ, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές,

β) οι δύο διχοτόμοι τέμνονται κάθετα.

5. Σε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και Δ τυχαίο σημείο της $B\Gamma$. Στην προέκταση της AB προς το Β θεωρούμε σημείο Ε ώστε $BE = B\Delta$. Αν η $E\Delta$ τέμνει την $A\Gamma$ στο Z, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta Z\Gamma$ είναι ισοσκελές.

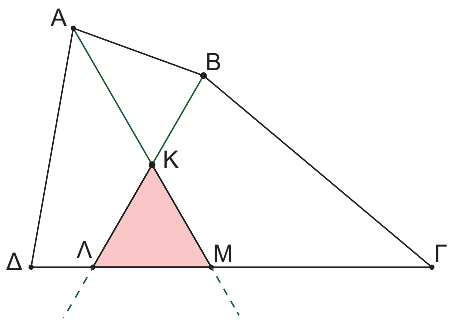
6. Στο παρακάτω τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $AB = A\Delta = B\Gamma$ και $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{\Gamma} = 80^\circ$. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Delta} = \omega$ σε μοίρες.



7. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB. Στην προέκταση της ΓA προς το A, παίρνουμε τμήμα $AE = A\Delta$. Να αποδείξετε ότι $\Delta E \perp B\Gamma$ (ΔΕ κάθετο του ΒΓ).

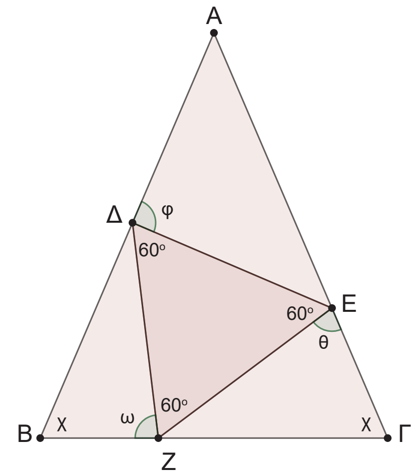
8. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε την υποτείνουσα ΓΒ κατά τμήμα $B\Delta = AB$. Φέρουμε κάθετη στη ΒΓ στο σημείο Γ και παίρνουμε σε αυτή, προς το μέρος του A, τμήμα $ΓΕ = ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $Δ, Α, Ε$ είναι **συνευθειακά**, δηλαδή τα σημεία $Δ, Α, Ε$ βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

9. Δίνεται τετράπλευρο με $\hat{Α} = 2\hat{Γ}$ και $\hat{Β} = 2\hat{Δ}$. Φέρουμε τις διχοτόμους των γωνιών $\hat{Α}$ και $\hat{Β}$ που τέμνονται στο σημείο Κ και τέμνουν την ΔΓ στα σημεία Μ και Λ αντίστοιχα.



Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο.

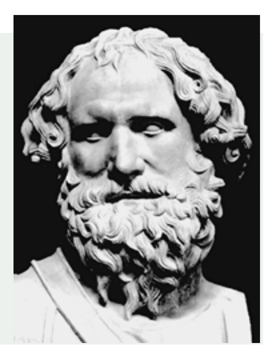
10. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και στις πλευρές του τα σημεία Δ,Ε και Ζ (όπως στο σχήμα), ώστε το τρίγωνο ΔΕΖ να είναι ισόπλευρο. Για τις σημειωμένες γωνίες ω, φ και θ να αποδείξετε ότι ισχύει $2ω = φ + θ$.



11. Να προσδιορίσετε όλα τα τρίγωνα τα οποία μπορούν να χωριστούν σε δύο ισοσκελή τρίγωνα, με ευθεία που περνά από μία κορυφή τους.

Στιγμές από την Ιστορία των Μαθηματικών

Ένα από τα προβλήματα που αντιμετώπισαν οι αρχαίοι Έλληνες γεωμέτρες ήταν να βρουν τρόπο να τριχοτομούν μία οποιαδήποτε γωνία. Η κατασκευή, όμως, έπρεπε να γίνει με βάση τους περιορισμούς της Ευκλείδειας επιταγής, χρησιμοποιώντας δηλαδή μόνο διαβήτη και κανόνα. Όλες οι προσπάθειες έπεσαν στο κενό γιατί, όπως αποδείχθηκε αργότερα, μία τέτοια κατασκευή είναι αδύνατη. Όμως, ο μεγαλύτερος μαθηματικός της Αρχαιότητας ο **Αρχιμήδης** από τις Συρακούσες βρήκε τρόπο να τριχοτομεί οποιαδήποτε γωνία εισάγοντας στη γεωμετρία την κίνηση ή όπως έλεγε τότε με τη μέθοδο της **«νεύσης»**.



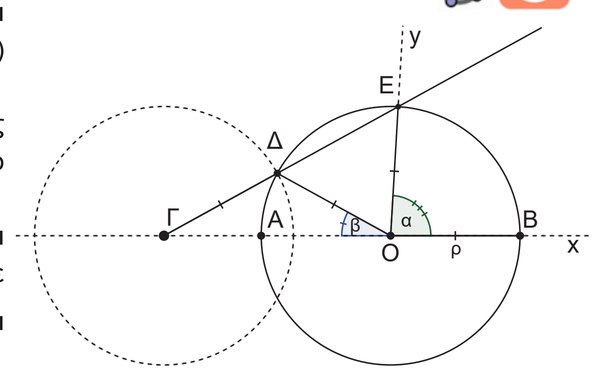
Ας παρακολουθήσουμε τη σκέψη του σαν να είναι μία ακόμα άσκηση προς λύση.

Τριχοτόμηση γωνίας με τη μέθοδο της “νεύσης” από τον Αρχιμήδη

Ας υποθέσουμε ότι ο Αρχιμήδης θέλει να τριχοτομήσει τη γωνία $x\hat{O}y = α$. Τότε κατασκευάζει κύκλο (Ο, ρ) όπου ρ η ακτίνα του με τυχαίο μήκος.

Ονομάζει Β και Ε τα σημεία που ο κύκλος τέμνει τις πλευρές Οx και Οy της γωνίας αντίστοιχα. Στο σημείο αυτό εκτελεί την λεγόμενη «νεύση».

Θεωρεί σημείο Δ του κύκλου ώστε οι ευθείες ΕΔ και ΒΟ προεκτεινόμενες να τέμνονται σε σημείο Γ ώστε να είναι ΓΔ = ρ. Μετά ισχυρίζεται ότι η γωνία $Δ\hat{O}Γ$ έχει μέτρο το $\frac{1}{3}$ του μέτρου της γωνίας α.

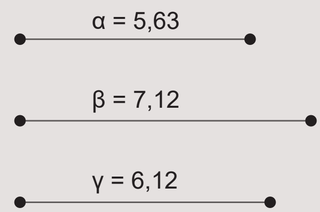


Μπορείτε να αποδείξετε την αλήθεια του ισχυρισμού του Αρχιμήδη;

Ε. Γεωμετρικές κατασκευές τριγώνων με δεδομένα βασικά στοιχεία τους.

Δραστηριότητα

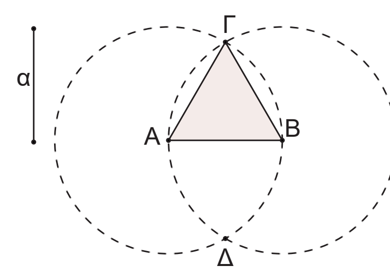
Όταν ο Ευκλείδης έγραφε τα «Στοιχεία», ήθελε κάθε γεωμετρικό αντικείμενο που μελετούσε να είναι σε θέση να το κατασκευάζει. Προσοχή όμως, να το κατασκευάζει και όχι απλώς να το ζωγραφίζει!
Η διαφορά βρίσκεται στην ακρίβεια του αποτελέσματος.
Δηλαδή, αν θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα τρίγωνο με πλευρές τα ευθύγραμμα τμήματα του διπλανού σχήματος που μετρήθηκαν
α = 5,63 cm, β = 7,12 cm και γ = 6,12 cm.
Ποιες είναι οι ενέργειες που πρέπει να κάνουμε;
Προσπαθήστε χρησιμοποιώντας τα κατάλληλα γεωμετρικά όργανα να κατασκευάσετε ένα τέτοιο τρίγωνο. Προσοχή όμως, θέλουμε ένα τρίγωνο με πλευρές τα τμήματα α, β και γ που δίνονται και όχι περίπου ίσες με αυτά.



Στα επόμενα προβλήματα θα αντιμετωπίσουμε μερικές βασικές κατασκευές τριγώνων, όταν μας δίνονται τρία στοιχεία τους, κύρια ή δευτερεύοντα. Συγχρόνως, θα κατανοήσουμε ότι τα κριτήρια ισότητας δύο τριγώνων δεν είναι τίποτε άλλο παρά προτάσεις μονοσήμαντης κατασκευής ενός τριγώνου με δεδομένα ΠΠΠ ή ΠΓΠ ή ΓΠΓ για το τυχαίο τρίγωνο.

1) Να κατασκευασθεί ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α. (Σχ.12)

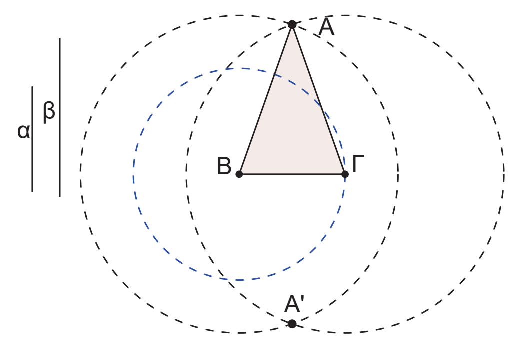
Θεωρούμε σημείο Α. Γράφουμε κύκλο (Α, α) και θεωρούμε τυχαίο σημείο του Β. Γράφουμε τον κύκλο (Β, α).
Οι δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Γ και Δ.
Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι ισόπλευρα πλευράς α.
(Γιατί;)



Σχήμα 12

2) Να κατασκευασθεί ισοσκελές τρίγωνο πλευρών α – β – β. (Σχ.13)

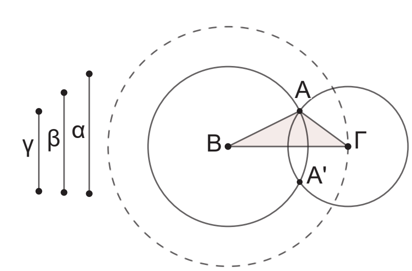
Θεωρούμε σημείο Β.
Γράφουμε κύκλο (Β,α) και θεωρούμε τυχαίο σημείο του Γ. Γράφουμε τους κύκλους (Β,β) και (Γ,β) οι οποίοι τέμνονται στα σημεία Α και Α'.
Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'ΒΓ είναι ισοσκελή με πλευρές α – β – β.
(Γιατί;)



Σχήμα 13

3) Να κατασκευασθεί τρίγωνο, αν γνωρίζουμε ότι οι πλευρές του είναι ίσες με τρία δοσμένα τμήματα. (Σχ.14)

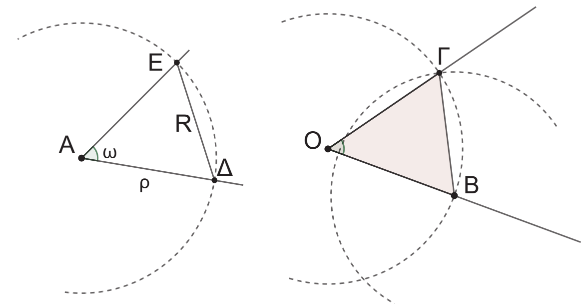
Κατασκευάζουμε τμήμα ΒΓ =α.
Κατασκευάζουμε τους κύκλους (Β,γ) και (Γ,β).
Ονομάζουμε Α και Α' τα σημεία τομής τους.
Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'ΒΓ έχουν πλευρές ίσες με α, β και γ.
(Γιατί;)



Σχήμα 14

4) Να κατασκευασθεί γωνία ίση με δοσμένη. (Σχ.15)

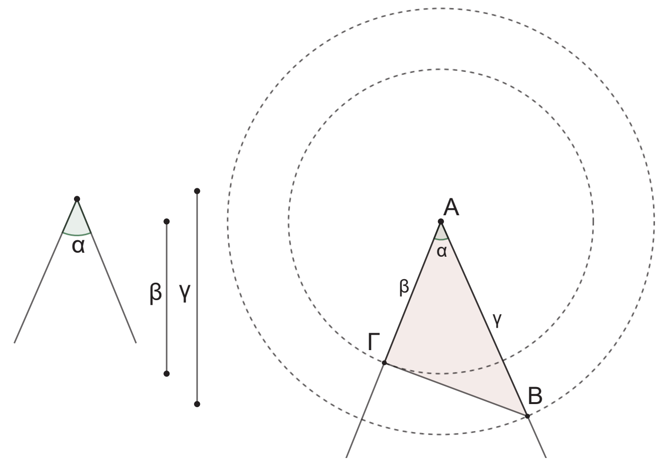
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τη γωνία ω και θέλουμε να κατασκευάσουμε μία γωνία ίση με αυτήν που να έχει κορυφή το σημείο Ο.
Γράφουμε τυχαίο κύκλο με κέντρο το Α που τέμνει τις πλευρές της $\widehat{\omega}$ στα σημεία Ε και Δ.
Ας ονομάσουμε $ΑΔ = \rho$ και $ΔΕ = R$. Γράφουμε τον κύκλο (Ο, ρ). Σε ένα τυχαίο σημείο του Β γράφουμε τον κύκλο (Β, R). Ονομάζουμε Γ το σημείο τομής των δύο κύκλων. Τα τρίγωνα ΟΓΒ και ΑΕΔ είναι ίσα (Γιατί;).
Οπότε η γωνία $Γ\widehat{Ο}Β$ είναι ίση με τη γωνία $Ε\widehat{Α}Δ = \omega$.



Σχήμα 15

5) Να κατασκευασθεί τρίγωνο, αν γνωρίζουμε τις πλευρές β, γ και την περιεχόμενη γωνία $\widehat{Β}$. (Σχ.16)

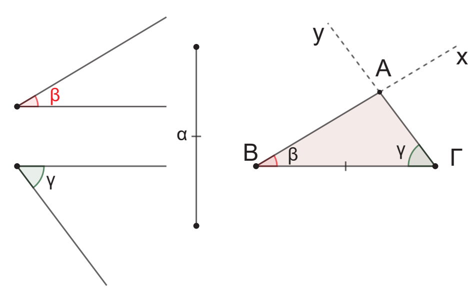
Κατασκευάζουμε γωνία με κορυφή τυχαίο σημείο Α ίση με α.
(Όπως στην 4η κατασκευή).
Γράφουμε τους κύκλους (Α,β) και (Α,γ) που τέμνουν τις πλευρές τις γωνίας α στα σημεία Γ και Β αντίστοιχα.
Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.
(Γιατί;)



Σχήμα 16

6) Να κατασκευασθεί τρίγωνο, αν γνωρίζουμε την πλευρά α και τις προσκείμενες γωνίες $\widehat{Β}$ και $\widehat{Γ}$. (Σχ.17)

Κατασκευάζουμε τμήμα $ΒΓ = \alpha$. Κατασκευάζουμε τις γωνίες $x\widehat{Β}Γ = \widehat{\beta}$ και $Β\widehat{Γ}\psi = \widehat{\gamma}$.
Ονομάζουμε Α το σημείο τομής των ημιευθειών Βx και Γy.
Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.
(Γιατί;)

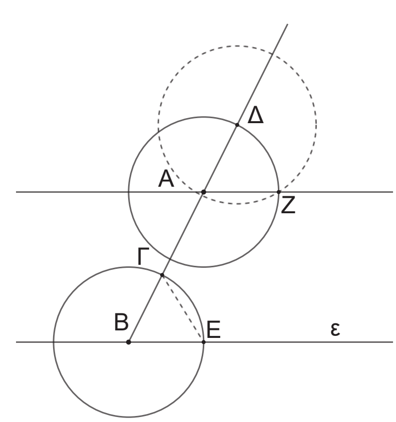


Σχήμα 17

7) Ας ασχοληθούμε και με μία βασική κατασκευή.

Να κατασκευασθεί ευθεία παράλληλη προς την (ε) που να διέρχεται από σημείο Α εκτός της ε. (Σχ.18)

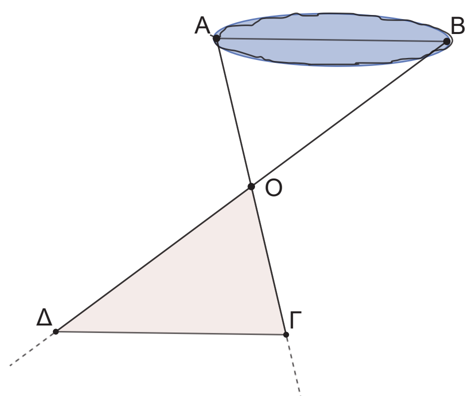
Θεωρούμε τυχαίο σημείο Β της ε και κατασκευάζουμε την ημιευθεία ΒΑ. Με ακτίνα τυχαίο τμήμα ρ γράφουμε τους κύκλους (Β, ρ) και (Α, ρ) που τέμνουν την ΒΑ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα και την ε στο σημείο Ε.
Γράφουμε τον κύκλο (Δ, ΓΕ) που τέμνει τον (Α, ρ) στο σημείο Ζ.
Ισχυριζόμαστε ότι η ευθεία ΑΖ είναι παράλληλη της ε.
(Γιατί;)



Σχήμα 18

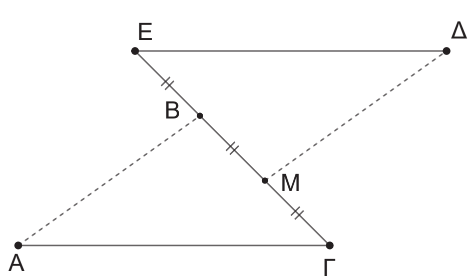
Ασκήσεις και Προβλήματα

1. Ένας τοπογράφος θέλει να μετρήσει το μήκος $ΑΒ$ μιας λίμνης. Βρίσκει μία θέση $Ο$ από την οποία βλέπει και τα δύο σημεία $Α$ και $Β$. Μετά στην ημιευθεία $ΑΟ$ θεωρεί σημείο $Γ$, ώστε $ΑΟ = ΟΓ$ και στην ημιευθεία $ΒΟ$ σημείο $Δ$, ώστε $ΒΟ = ΟΔ$. Μετρώντας την απόσταση $ΔΓ$ ισχυρίζεται ότι βρίσκει και την απόσταση $ΑΒ$. Είναι σωστός ο ισχυρισμός του και γιατί;



2. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

3. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε τα τμήματα $ΑΒ$ και $ΔΜ$ να είναι ίσα και παράλληλα και $ΕΒ = ΒΜ = ΜΓ$.



Να αποδείξετε ότι τα τμήματα $ΔΕ$ και $ΑΓ$ είναι ίσα και παράλληλα.

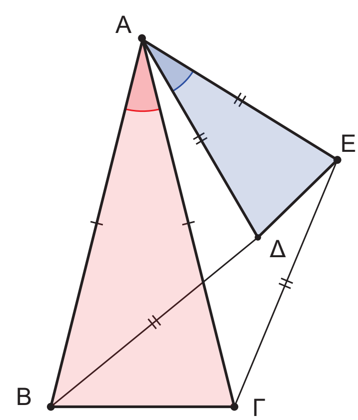
4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ$. Στις πλευρές $ΑΒ$ και $ΑΓ$ θεωρούμε τα σημεία $Κ$ και $Λ$ αντίστοιχα, ώστε $ΑΚ = ΑΛ$.
Να αποδείξετε ότι τα σημεία $Κ$ και $Λ$:

α) Ισαπέχουν των σημείων $Γ$ και $Β$ αντίστοιχα.

β) Ισαπέχουν της ευθείας $ΒΓ$.

5. Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$. Να αποδείξετε ότι τα ύψη $ΒΔ$ και $ΓΕ$ είναι ίσα. Διατυπώστε την αντίστροφη πρόταση και αποδείξτε την.

6. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται δύο ισοσκελή τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΑΕ$ με $ΑΒ = ΑΓ$ και $ΑΔ = ΑΕ$ με κοινή κορυφή την $Α$, ώστε $Β\hat{Α}Γ = Δ\hat{Α}Ε$.
Να αποδείξετε ότι $ΒΔ = ΓΕ$.

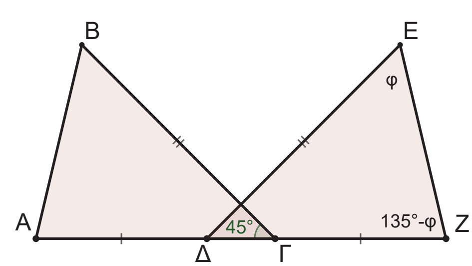


7. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$. Προεκτείνουμε την $ΒΓ$ προς τα σημεία $Γ$ και $Β$ και θεωρούμε τα τμήματα $ΓΕ$ και $ΒΔ$ αντίστοιχα, ίσα μεταξύ τους. Προεκτείνουμε τις πλευρές $ΑΒ$ και $ΑΓ$ προς τα σημεία $Β$ και $Γ$ και φέρουμε τις κάθετες $ΔΖ$ και $ΓΗ$ προς αυτές.
Να αποδείξετε ότι:

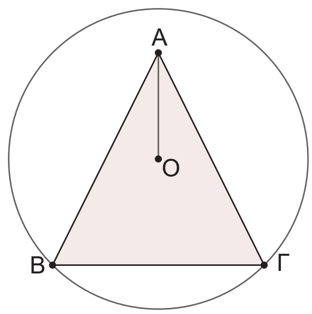
α) Τα τρίγωνα $ΔΒΖ$ και $ΕΓΗ$ είναι ίσα.

β) $ΓΖ = ΒΗ$.

8. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε $ΒΓ = ΕΔ$, $ΑΔ = ΓΖ$ και $Δ\hat{Ε}Ζ = φ$, $Ε\hat{Ζ}Δ = 135^{\circ} - φ$.
Να αποδείξετε ότι $ΑΒ = ΕΖ$.



9. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται κύκλος (O,ρ) και το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$.
Να αποδείξετε ότι:

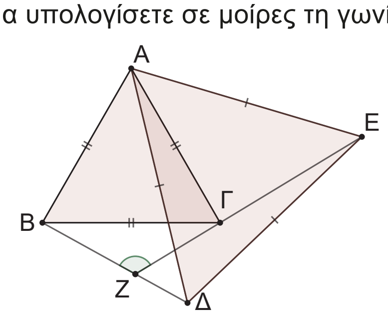


α) Η ΟΑ είναι διχοτόμος της γωνία $B\hat{A}\Gamma$.
β) Η ΟΑ είναι κάθετη της ΒΓ.
γ) Η ΟΑ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{O}\Gamma$.

10. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ έχουν $\beta = \beta'$, $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\delta_\alpha = \delta_{\alpha'}$.
Να αποδείξετε ότι είναι ίσα.

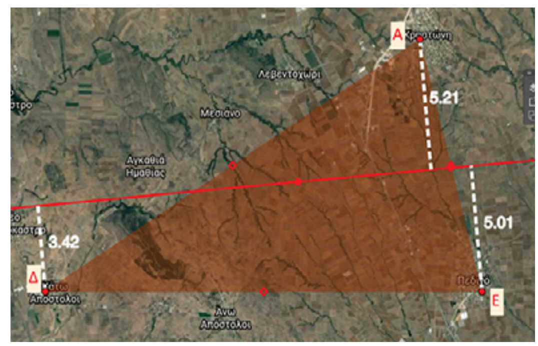
11. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν $\alpha = \alpha'$, $\gamma = \gamma'$ και $\mu_\alpha = \mu_{\alpha'}$.
Να αποδείξετε ότι είναι ίσα.

12. Δίνονται τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ, όπως στο σχήμα. Αν η προέκταση της ΕΓ τέμνει την ΒΔ στο Ζ.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΓΕ και ΑΒΔ είναι ίσα.
β) Να υπολογίσετε σε μοίρες τη γωνία $B\hat{Z}E$.

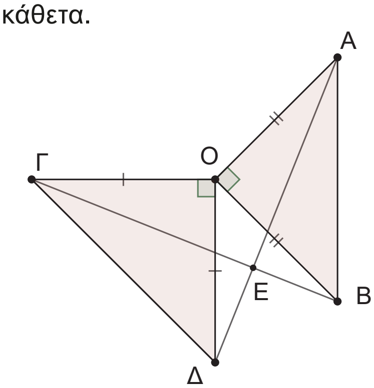


13. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της ΑΒ προς το Β παίρνουμε σημείο Δ, ώστε ΒΔ = ΑΒ και στην προέκταση της ΑΓ προς το Γ παίρνουμε σημείο Ε, ώστε ΓΕ = ΑΓ. Αν ΑΘ το ύψος του τριγώνου και ΔΖ, ΕΗ οι αποστάσεις των Δ, Ε προς την ΒΓ, τότε:
α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΘ και ΒΔΖ.
β) Να αποδείξετε ότι ΕΗ = ΔΖ.
γ) Χρησιμοποιείστε την άσκηση για να απαντήσετε στην παρακάτω ερώτηση:

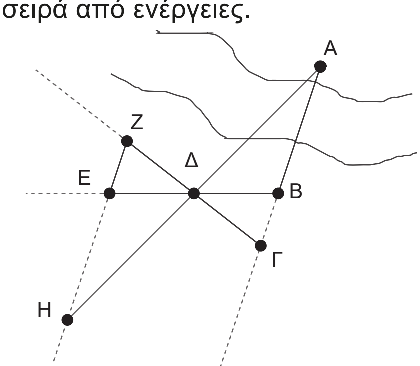
Ανάμεσα στα χωριά Κρηστώνη (Α), Πεδινό (Ε) και Κάτω Απόστολοι (Δ) πρόκειται να φτιαχτεί ένας δρόμος, ώστε και τα τρία χωριά να απέχουν εξίσου. Μπορείτε να βοηθήσετε στην χάραξη του δρόμου; Πόσες εναλλακτικές προτάσεις μπορούν να γίνουν;



14. Θεωρούμε τα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα ΟΓΔ και ΟΑΒ, όπως στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι οι ΑΔ και ΓΒ είναι ίσες και τέμνονται κάθετα.

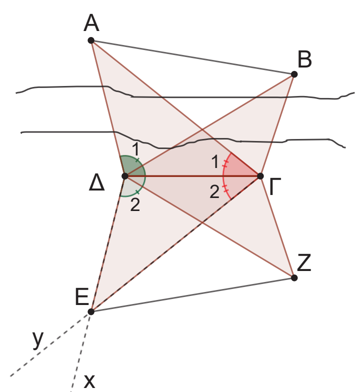


15. Έστω τα σημεία Α και Β σε διαφορετικές όχθες ενός ποταμού και θέλουμε να υπολογίσουμε την απόστασή τους, ενώ εμείς βρισκόμαστε στην πλευρά του σημείου Β.
Υπάρχει ένας εμπειρικός τρόπος υπολογισμού της απόστασης αυτής, αρκεί να εκτελέσουμε μια σειρά από ενέργειες.



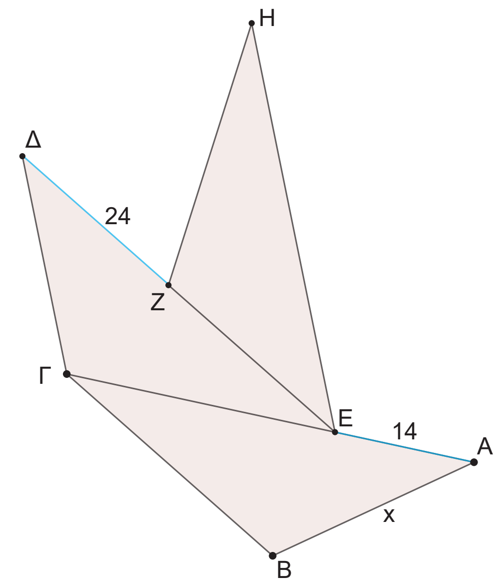
Κατά αρχήν θεωρούμε ένα οποιαδήποτε σημείο Γ στην ευθεία ΑΒ και ένα άλλο τυχαίο σημείο Δ (όπως στο παραπάνω σχήμα).
Βρίσκουμε το σημείο Ζ στην ευθεία ΓΔ, ώστε ΔΖ = ΓΔ και το σημείο Ε στην ΒΔ, ώστε ΒΔ = ΔΕ.
Προχωρούμε κατά μήκος της ευθείας ΖΕ μέχρι το σημείο Η, όπου διαπιστώνουμε ότι τα σημεία Η, Δ και Α είναι στην ίδια ευθεία.
Ισχυριζόμαστε ότι η απόσταση ΕΗ είναι ίση με την απόσταση ΑΒ. Είναι σωστός ο ισχυρισμός αυτός και γιατί;

16. Έστω τα σημεία Α και Β στην ίδια όχθη ενός ποταμού και εμείς που βρισκόμαστε στην απέναντι όχθη θέλουμε να βρούμε την απόστασή τους.
Υπάρχει ένας εμπειρικός τρόπος υπολογισμού της απόστασης αυτής, αρκεί να εκτελέσουμε μια σειρά από ενέργειες.

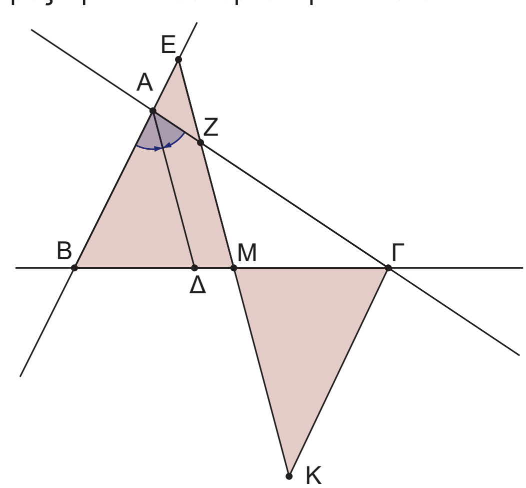


Κατά αρχήν θεωρούμε δύο τυχαία σημεία Γ και Δ στην όχθη που βρισκόμαστε. Μετράμε τη γωνία $\Gamma\hat{\Delta}A = \hat{\Delta}_1$ και με τη βοήθεια της ημιευθείας Δx κατασκευάζουμε γωνία $\hat{\Delta}_2 = \Gamma\hat{\Delta}x = \hat{\Delta}_1$.
Παρόμοια με την βοήθεια της ημιευθείας Γy κατασκευάζουμε γωνία $\hat{\Gamma}_2 = \hat{\Gamma}_1$. Ονομάζουμε Ε το σημείο τομής των Δx και Γy.
Το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ίσο με το ΑΔΓ. (Γιατί;)
Με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζουμε το τρίγωνο ΔΓΖ ίσο με το ΔΒΓ.
Ισχυριζόμαστε ότι η απόσταση ΕΖ είναι ίση με την απόσταση ΑΒ.
Είναι σωστός ο ισχυρισμός αυτός και γιατί;

17. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΓΔΕ και ΗΖΕ ίσα μεταξύ τους (ΑΓ=ΔΕ=ΗΕ και ΓΒ=ΓΕ=ΗΖ). Αν η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι 124 μονάδες και επιπλέον γνωρίζουμε ότι ΔΖ=24 και ΕΑ=14, να υπολογίσετε την πλευρά ΑΒ = x.



18. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε παράλληλη προς τη διχοτόμο που τέμνει τις ΒΑ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Αν από το Γ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την ΜΕ στο Κ.



Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα ΕΒΜ και ΜΓΚ είναι ίσα.

γ) Ισχύει: $Z\Gamma + BE = AB + A\Gamma$.

19. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τα σημεία Κ,Λ,Μ ώστε $ΑΚ = ΒΛ = ΓΜ$. Αποδείξτε ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο. Ισχύει το αντίστροφο; Δηλαδή αν Κ,Λ,Μ σημεία στις πλευρές ΑΒ,ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα ενός ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ, ώστε το τρίγωνο ΚΛΜ να είναι ισόπλευρο, τότε θα ισχύει $ΑΚ = ΒΛ = ΓΜ$;

20. Δίνονται τα ίσα τμήματα ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται στο Κ, $(ΚΑ < ΚΒ$ και $ΚΓ < ΚΔ)$. Αν $ΑΔ = ΓΒ$ να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΚΑΔ και ΚΓΒ είναι ίσα.

21. Να αποδείξετε ότι αν σε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι $α = α'$, $υ_α = υ_{α'}$, $μ_α = μ_{α'}$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

22. Σε γωνία $x\hat{O}y$ θεωρούμε τα σημεία Α, Β και Α΄, Β΄ στις Οx και Οy αντίστοιχα, ώστε $ΟΑ = ΟΑ΄$ και $ΟΒ = ΟΒ΄$.
Αν Κ το σημείο τομής των ΑΒ' και ΒΑ' να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΟΑ'Β και ΟΑΒ' είναι ίσα

β) Τα τρίγωνα ΚΑ'Β' και ΚΑΒ είναι ίσα

γ) Η ΟΚ είναι διχοτόμος της γωνία $x\hat{O}y$.

Με τη βοήθεια της άσκησης μπορείτε να βρείτε έναν τρόπο κατασκευής της διχοτόμου μιας γωνίας χρησιμοποιώντας μόνο διαβήτη και κανόνα;

23. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και το μέσο του Μ. Εκατέρωθεν του ΑΒ κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΜΚ και ΑΜΛ. Αποδείξτε ότι το τρίγωνο ΚΛΒ είναι ισόπλευρο.
Με τη βοήθεια της προηγούμενης άσκησης απαντήστε το παρακάτω πρόβλημα.

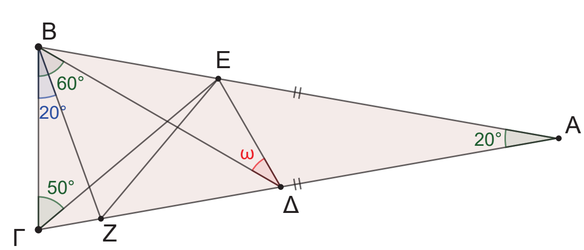
«Ας φανταστούμε ότι όλα τα σημεία του επιπέδου σημειώνονται με κόκκινο ή με μαύρο χρώμα. Δικαιολογείστε, γιατί πάντα θα υπάρχει ισόπλευρο τρίγωνο που οι κορυφές του θα είναι του ίδιου χρώματος».

Στιγμές από την Ιστορία των Μαθηματικών

Ο **Edward Mann Langley** (1851–1933) ήταν Βρετανός μαθηματικός, συγγραφέας μαθηματικών εγχειριδίων και ιδρυτής του **Mathematical Gazette** (περιοδικό της Βρετανικής Μαθηματικής Εταιρείας).
Είναι δημιουργός της **πιο δύσκολης άσκησης της στοιχειώδους Γεωμετρίας,** η οποία αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως «**το τρίγωνο 80-80-20**». Οι γνώσεις που απαιτούνται για την λύσει κάποιος είναι ότι το άθροισμα των γωνιών οποιουδήποτε τριγώνου είναι ίσο με 180° και ότι στο ισοσκελές τρίγωνο οι γωνίες της βάσης είναι ίσες.
Η δυσκολία της βρίσκεται στο γεγονός ότι οποιαδήποτε λύση χρειάζεται βοηθητική ευθεία. Αλλά ποια είναι αυτή;

Ας δούμε τι λέει το πρόβλημα αυτό.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) με $\hat{A} = 20^\circ$. Θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε στις ίσες πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, ώστε $Γ\hat{B}Δ = 60^\circ$ και $B\hat{Γ}E = 50^\circ$.
Να υπολογίσετε τη γωνία $E\hat{Δ}B = ω$ σε μοίρες.



Υπόδειξη:

Θεωρήστε σημείο Ζ της ΑΓ, ώστε $Γ\hat{B}Z = 20^\circ$ και αποδείξτε ότι:

- τα τρίγωνα ΒΓΖ, ΒΖΔ είναι ισοσκελή,
- το τρίγωνο ΒΖΕ είναι ισόπλευρο,
- το τρίγωνο ΕΖΔ είναι ισοσκελές και τέλος να υπολογίσετε τη γωνία ω.

Εργασία για το σπίτι

- Λύστε με τη βοήθεια της υπόδειξης την άσκηση.
- Ψάξτε στο διαδίκτυο για άλλες λύσεις της άσκησης «το τρίγωνο 80-80-20».

2.2
Βασικοί γεωμετρικοί τόποι

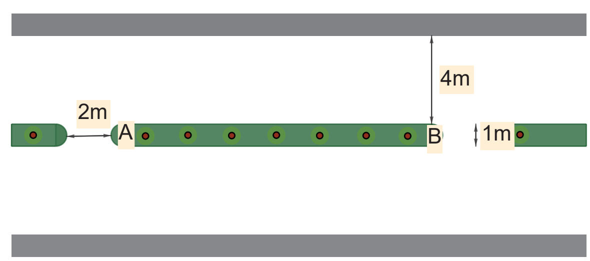
Τι καινούργιο υπάρχει στην ενότητα

Στις παρακάτω σελίδες:
- μαθαίνουμε τον ορισμό του γεωμετρικού τόπου,
- ορίζουμε τη μεσοκάθετο τμήματος και τη διχοτόμο γωνίας ως γεωμετρικούς τόπους,
- κατασκευάζουμε με κανόνα και διαβήτη τη μεσοκάθετο ενός ευθύγραμμου τμήματος και τη διχοτόμο μιας γωνίας.

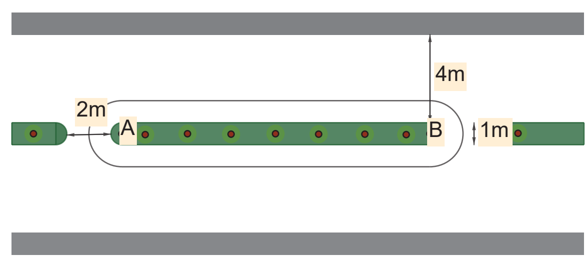
Α. Έννοια γεωμετρικού τόπου.

Δραστηριότητα

Ο Γιώργος παίρνει το ποδήλατό του και κάνει βόλτα γύρω από τη διαχωριστική νησίδα ΑΒ με τέτοιον τρόπο, ώστε να απέχει από αυτήν πάντα 1 μέτρο. Μπορείτε να φανταστείτε τη γραμμή που σχηματίζουν οι διαδοχικές θέσεις του Γιώργου γύρω από την νησίδα.
Ποια είναι η ιδιότητα που έχουν όλα τα σημεία της διαδρομής αυτής;



Προφανώς η διαδρομή του Γιώργου μοιάζει με τη γραμμή στο διπλανό σχήμα.
Αποτελείται από σημεία που απέχουν 1μ από τη νησίδα.



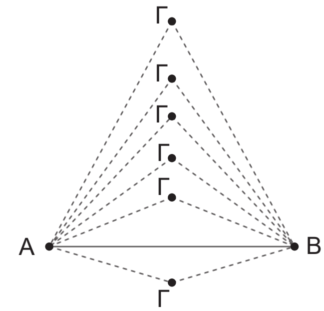
Ας δούμε τι έχει προκύψει

Στη γεωμετρία **ένα σύνολο από σημεία που έχουν μία κοινή ιδιότητα το ονομάζουμε γεωμετρικό τόπο.**
Παρακάτω θα ασχοληθούμε με τους δύο πιο κλασικούς γεωμετρικούς τόπους, τη διχοτόμο μιας γωνίας και τη μεσοκάθετο ενός ευθύγραμμου τμήματος.

Β. Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος ως γεωμετρικός τόπος

Δραστηριότητα

Ας φανταστούμε τρεις φίλους τον Άρη, τον Βαγγέλη και τον Γιάννη. Ο Άρης και ο Βαγγέλης είναι ακίνητοι και ο Γιάννης κινείται, έτσι ώστε να απέχει την ίδια απόσταση από τους δύο φίλους του. Καθώς ο Γιάννης κινείται, αφήνει σε κάθε θέση και ένα πετραδάκι. Υποψιάζεστε τι γραμμή σχηματίζουν όλα τα πετραδάκια που αφήνει ο Γιάννης;



Αν σχεδιάσετε τον Γιάννη σε διάφορες θέσεις θα πάρετε μια εικόνα σαν αυτή του διπλανού σχήματος. Στο σχήμα οι τρεις φίλοι ονομάζονται με τα αρχικά γράμματα των ονομάτων τους.
Αν φανταστούμε περισσότερες θέσεις, τότε θα καταλήξουμε στην εικασία ότι ο Γ θα κινείται πάνω σε μία γραμμή.
Είναι μια γραμμή όπου όλα τα σημεία της έχουν μια κοινή ιδιότητα, να απέχουν την ίδια απόσταση από τα σημεία Α και Β.
Παρατηρείστε ότι οι διαδοχικές θέσεις του Γιάννη σχηματίζουν με τα σημεία Α και Β ισοσκελή τρίγωνα. Τι γνωρίζουμε για τα ισοσκελή τρίγωνα;
Το ύψος από την κορυφή είναι και διάμεσος, άρα ο Γιάννης βρίσκεται πάντα σε μία ευθεία που είναι κάθετη στο μέσο της απόστασης των δύο φίλων του. Πως την λέμε την ευθεία αυτή;

Βασική ιδιότητα της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος

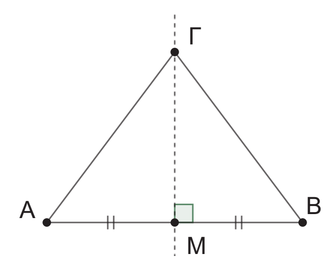
ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος και αντίστροφα.

Αποδειξη

Ευθύ: Έστω ένα σημείο Γ της μεσοκαθέτου, τότε αυτό ισαπέχει των άκρων του ευθύγραμμου τμήματος. (Σχ.19)

Υπόθεση	Το Γ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ
Συμπέρασμα	ΓΑ = ΓΒ

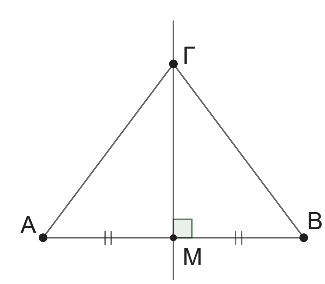


Σχήμα 19

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, διότι η ΓΜ ύψος και διάμεσος.
Άρα ΓΑ = ΓΒ.

Αντίστροφο: Αν ένα σημείο ισαπέχει των άκρων του ευθύγραμμου τμήματος, τότε αυτό ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος. (Σχ.20)

Υπόθεση	ΓΑ = ΓΒ
Συμπέρασμα	Το Γ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ



Σχήμα 20

Το τρίγωνο ΑΓΒ είναι ισοσκελές (ΓΑ = ΓΒ) άρα, αν φέρω το ύψος του από την κορυφή Γ, θα είναι και διάμεσος.

Οπότε, το Γ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ. ■
Με τη βοήθεια της ιδιότητας αυτής μπορούμε να δώσουμε και τον εξής ορισμό της μεσοκαθέτου.

Μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος.

Γ. Διχοτόμος γωνίας ως γεωμετρικός τόπος

Δραστηριότητα

Γνωρίζουμε ότι διχοτόμος γωνίας είναι η ημιευθεία που την χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες.
Άνοιξτε την εφαρμογή GeoGebra.
Μετακινήστε το εσωτερικό σημείο Α της γωνίας.
Ανακαλύψτε τη γραμμή στην οποία ανήκει το σημείο αυτό, όταν ισαπέχει των πλευρών της γωνίας.
Δικαιολογήστε την εικασία σας.

Βασική ιδιότητα της διχοτόμου

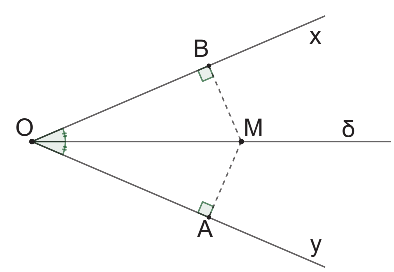
ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε σημείο της διχοτόμου ισαπέχει (απέχει το ίδιο) από τις πλευρές της γωνίας και αντίστροφα.

Αποδειξη

Ευθύ: Έστω ένα σημείο Μ της διχοτόμου, τότε αυτό ισαπέχει από τις πλευρές Οx και Οy της γωνίας $x\hat{O}y$. (Σχ.21)

Υπόθεση	Το Μ ανήκει στη διχοτόμο της $x\hat{O}y$ $MA \perp Oy$, $MB \perp Ox$
Συμπέρασμα	$MA = MB$

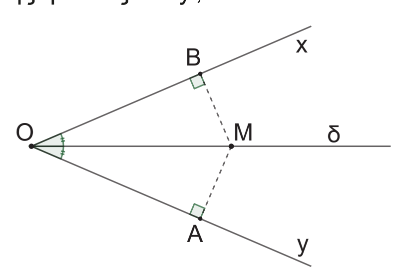


Σχήμα 21

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΜΒ και ΟΜΑ. Είναι ίσα διότι είναι ορθογώνια με τις υποτείνουσες τους και μία από τις οξείες γωνίες τους ίσες. Επομένως, θα έχουν όλα τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ένα προς ένα ίσα.
Άρα και $MA = MB$, οπότε το Μ ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.

Αντίστροφο: Αν ένα σημείο Μ ισαπέχει από τις πλευρές Οx και Οy της γωνίας $x\hat{O}y$, τότε αυτό είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας. (Σχ.22)

Υπόθεση	$MA \perp Oy$, $MB \perp Ox$ $MA = MB$
Συμπέρασμα	Το Μ ανήκει στη διχοτόμο της $x\hat{O}y$



Σχήμα 22

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΜΒ και ΟΜΑ. Είναι ίσα διότι είναι ορθογώνια με τις υποτείνουσες τους και μία από τις κάθετες πλευρές τους αντίστοιχα ίσες (ορθογώνια, ΟΜ κοινή, $MA = MB$). Επομένως, θα έχουν όλα τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ένα προς ένα ίσα. Άρα και $M\hat{O}B = M\hat{O}A$, οπότε το Μ είναι σημείο της διχοτόμου. ■

Με τη βοήθεια της ιδιότητας αυτής μπορούμε να καταλήξουμε στον ορισμό:

Διχοτόμος μιας γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις πλευρές της.

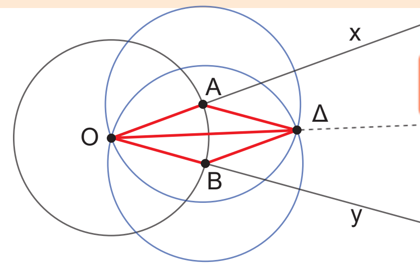
Σε τι χρησιμεύουν τα παραπάνω

Εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες που μάθαμε είμαστε σε θέση πλέον να κατασκευάσουμε τη διχοτόμο μιας γωνίας, αλλά και τη μεσοκάθετο ενός ευθύγραμμου τμήματος. Πως;
Ας δούμε τα παρακάτω.

Δ. Κατασκευές με κανόνα και διαβήτη μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος και διχοτόμου γωνίας

Κατασκευή διχοτόμου γωνίας (Σχ. 23)

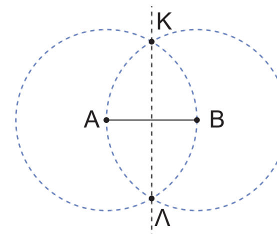
Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γωνία $x\hat{O}y$ και τον κύκλο (Ο, ρ) που τέμνει τις Οx και Οy στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Γράφουμε τους κύκλους (Α,ρ) και (Β,ρ) που τέμνονται στο σημείο Δ.
Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΔ είναι ίσα, διότι έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία. Άρα, θα έχουν και $A\hat{O}\Delta = \Delta\hat{O}B$, άρα η ΟΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$.



Σχήμα 23

Κατασκευή μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος (Σχ. 24)

Στο διπλανό σχήμα έχουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και γράφουμε τους κύκλους (Α,ΑΒ) και (Β,ΑΒ) που τέμνονται στα σημεία Κ και Λ. Το σημείο Κ ισαπέχει από τα Α και Β διότι $AK = BK = AB$ άρα ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ. Όμοια το σημείο Λ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ. Επειδή από δύο σημεία μία ευθεία ορίζεται, η ΚΛ είναι η μεσοκάθετος του ΑΒ.



Σχήμα 24

Ε. Απλοί γεωμετρικοί τόποι

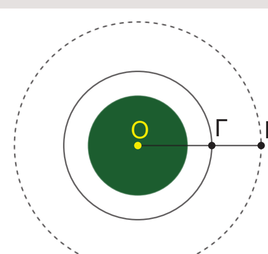
Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, γεωμετρικό τόπο ονομάζουμε ένα σύνολο από σημεία που έχουν μία κοινή ιδιότητα. Μήπως μπορείτε να ορίσετε τον κύκλο ως γεωμετρικό τόπο;
Ποια είναι η κοινή ιδιότητα όλων των σημείων ενός κύκλου;

Πράγματι, ο κύκλος (Κ, ρ) είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που απέχουν από το σημείο Κ σταθερή απόσταση ίση με ρ.

Δραστηριότητα

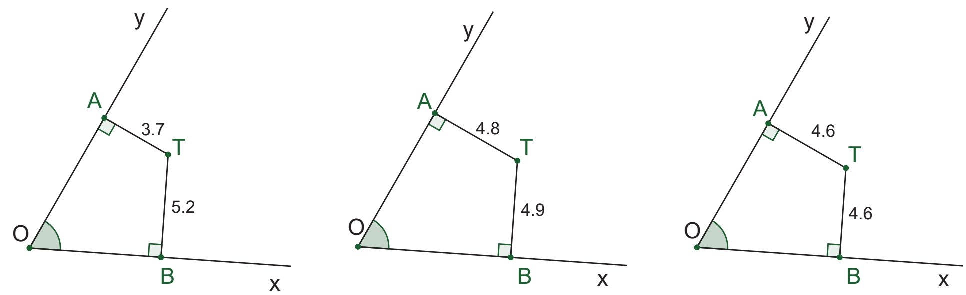
Ο Γιάννης κινείται με το ποδήλατό του γύρω από μια κυκλική πλατεία σε ένα πάρκο κυκλοφοριακής αγωγής. Το ποδήλατό του έχει στο πλάι καλάθι μεταφοράς που η ρόδα του απέχει 1 m από το ποδήλατο. Σε ποια γραμμή κινείται η ρόδα του καλαθιού, όταν ο Γιάννης κινεί το ποδήλατό του γύρω από μια πλατεία;

Σχεδιάζουμε την κυκλική πλατεία, και τον Γιάννη ως σημείο Γ, να κινείται γύρω από αυτήν. Είναι φανερό ότι η ρόδα Ρ του καλαθιού του ποδηλάτου θα διαγράφει κύκλο γύρω από την πλατεία. Άρα, ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των θέσεων της ρόδας;
Είναι ο κύκλος (Ο, ρ +1) όπου Ο το κέντρο της πλατείας και ρ η απόσταση του Γιάννη από αυτό.
Βέβαια, υπάρχει και η περίπτωση που ο Γιάννης κάνει λάθος και κινείται με φορά αντίθετη από αυτή που επιβάλλει ο κώδικας οδικής κυκλοφορίας. Τότε ο γεωμετρικός τόπος του καλαθιού το ποδηλάτου του θα είναι ο κύκλος (Ο, ρ – 1).

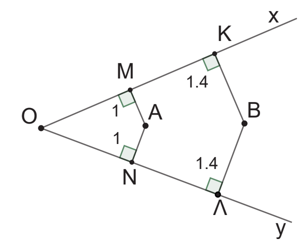


Ερωτήσεις κατανόησης

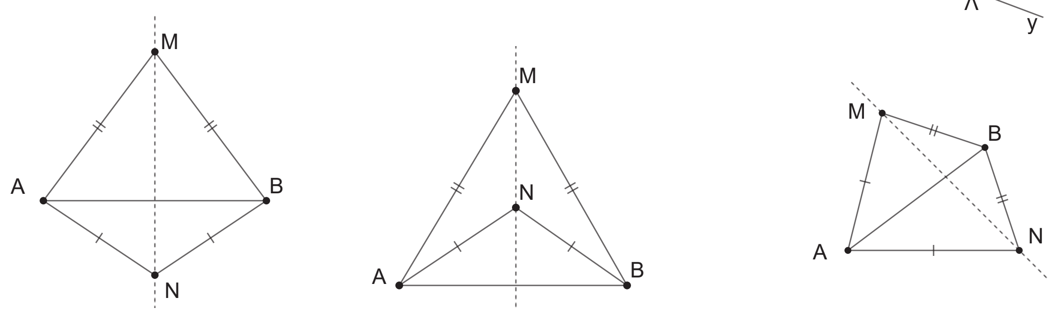
1. Αναγνωρίστε ποια σημεία ανήκουν στη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$ και ποια όχι.



2. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία ΑΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$;
Δικαιολογείστε την απάντησή σας.



3. Στα παρακάτω σχήματα η ευθεία ΜΝ είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



4. Να προσδιορίσετε ένα σημείο στο τρίγωνο ΑΒΓ που να ισαπέχει των πλευρών ΑΒ και ΑΓ και συγχρόνως να ισαπέχει και των κορυφών Β και Γ.

5. Αν τρία σημεία έχουν την ιδιότητα:

α) να ισαπέχουν των πλευρών μιας γωνίας τότε αυτά είναι συνευθειακά;

β) να ισαπέχουν των άκρων ενός ευθύγραμμου τμήματος, τότε αυτά είναι συνευθειακά;

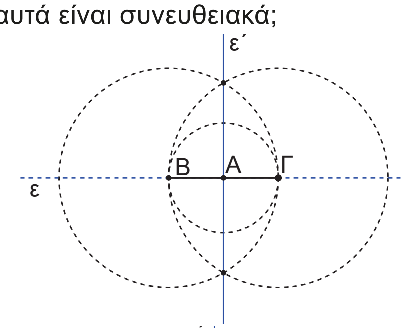
6. Ο καθηγητής θέλει να δείξει στους μαθητές του πως με χρήση διαβήτη και κανόνα είναι σε θέση να κατασκευάσει κάθετη σε μία ευθεία ε σε ένα σημείο της Α. Περιγράφει τις ενέργειες του ως εξής:

α) Κατασκευάζουμε κύκλο (Α, ρ).

β) Ονομάζουμε Β και Γ τα σημεία στα οποία τέμνει ο κύκλος την ε.

γ) Κατασκευάζουμε την μεσοκάθετο ε΄ του ΒΓ.

Αιτιολογείστε γιατί η ευθεία ε΄ είναι η ζητούμενη ευθεία.

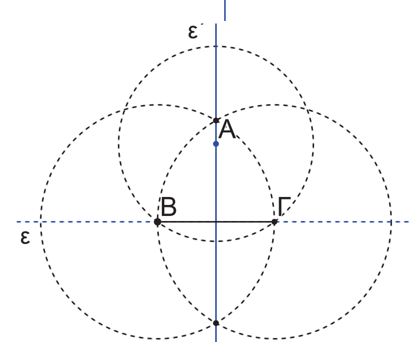


7. Ο καθηγητής θέλει να δείξει στους μαθητές του πως με χρήση διαβήτη και κανόνα είναι σε θέση να κατασκευάσει κάθετη σε ευθεία ε από σημείο Α που βρίσκεται έξω από αυτήν.
Περιγράφει τις ενέργειές του ως εξής:

α) Κατασκευάζουμε κύκλο (Α, ρ) που τέμνει την ε σε δύο σημεία Β και Γ.

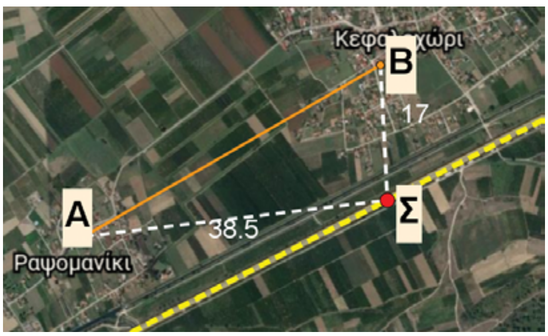
β) Κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετο ε΄ του ΒΓ.

Αιτιολογείστε γιατί η ευθεία ε΄ είναι η ζητούμενη ευθεία.

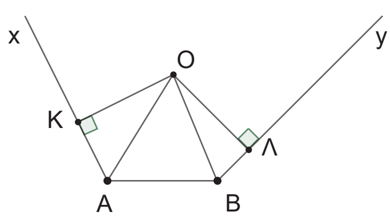


Ασκήσεις και Προβλήματα

1. Δύο χωριά Α και Β βρίσκονται κοντά σε μία ευθύγραμμη σιδηροδρομική γραμμή και πρέπει να εξυπηρετηθούν με έναν σταθμό (Σ) που να ισαπέχει των δύο χωριών. Σε ποια θέση πρέπει να κατασκευασθεί ο σταθμός του τρένου;

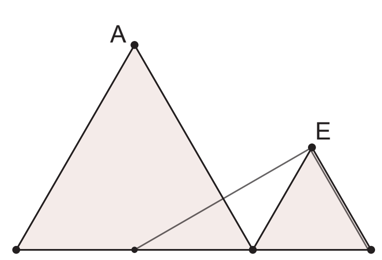


2. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε φέρει τις διχοτόμους των γωνιών $x\hat{A}B$ και $A\hat{B}y$ που τέμνονται στο σημείο Ο. Να αποδείξετε ότι το Ο ισαπέχει των Ax και By.



3. Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο τρίγωνο, στο οποίο το μέσο Μ της υποτείνουσάς του να ισαπέχει των κάθετων πλευρών του.

4. Δίνονται τα συνευθειακά σημεία Β, Γ και Δ με 2ΓΔ = ΒΓ. Κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ, όπως στο παρακάτω σχήμα. Αν Ζ το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι η ΑΓ είναι μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος ΖΕ.

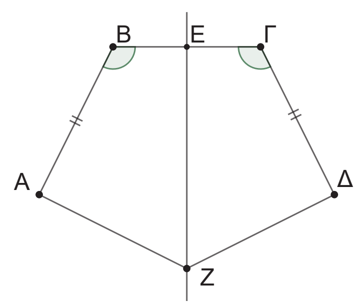


5. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma > B\Gamma)$. Η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΓ τέμνει την προέκταση της πλευράς ΓΒ στο Δ. Προεκτείνουμε την ΔΑ κατά τμήμα $AE = \Delta B$. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ισοσκελές,

β) το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές.

6. Δίνονται τέσσερα μη συνευθειακά σημεία Α, Β, Γ και Δ ώστε $AB = \Gamma\Delta$ και $A\hat{B}\Gamma = B\hat{\Gamma}\Delta$.
Στο μέσο Ε του ΒΓ φέρουμε κάθετη προς αυτό και θεωρούμε Ζ τυχαίο σημείο της.
Να αποδείξετε ότι $ZA = Z\Delta$.



7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο είναι $B\Gamma = 2AB$ και $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Αν ΒΔ διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ να αποδείξετε:

α) ότι το Δ ανήκει στη μεσοκάθετο της ΒΓ.

β) Αν Μ μέσο της ΒΓ να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΔΜ είναι ίσα

ii. και ότι $\hat{A} = 90^\circ$

8. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε την $\Delta E \perp B\Gamma$ που τέμνει την ημιευθεία ΒΑ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΓΖ είναι ισοσκελές.

9. Σε τρίγωνο ΑΒΓ $(AB < A\Gamma)$ προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ προς το μέρος του Α κατά τμήματα $A\Delta = A\Gamma$ και $AE = AB$ αντίστοιχα. Η ευθεία ΔΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο Μ. Να αποδείξετε ότι:

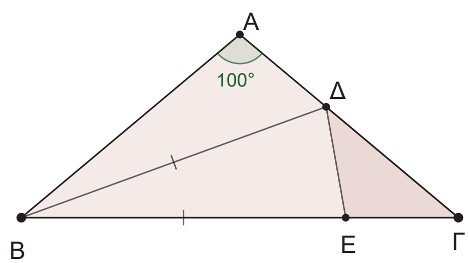
α) τα ύψη των τριγώνων ΑΕΔ και ΑΒΓ είναι ίσα.

β) η διχοτόμος της $B\widehat{M}E$ διέρχεται από το A.

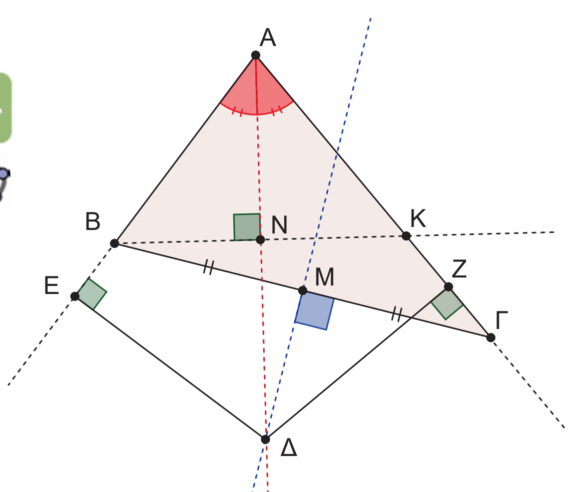
10. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 100°$ και η διχοτόμος του $ΒΔ$. Αν $Ε$ σημείο της $ΒΓ$ τέτοιο ώστε $ΒΕ = ΒΔ$, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ισοσκελές,

β) Ισχύει ότι $ΒΔ + ΔΑ = ΒΓ$.



11. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η μεσοκάθετος της ΒΓ και η διχοτόμος της γωνίας Α τέμνονται στο Δ. Από το Δ φέρουμε ΔΕ και ΔΖ κάθετα ευθύγραμμα τμήματα στους φορείς των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

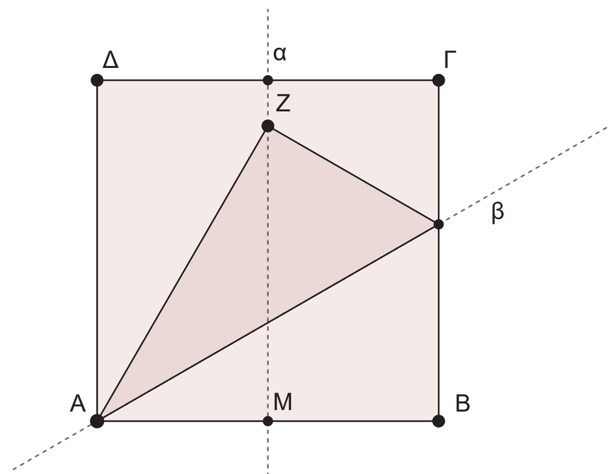


Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΕ = ΖΓ.

β) Αν φέρουμε κάθετη από το Β προς την διχοτόμο ΑΔ, που τέμνει την ΑΓ στο Κ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΔΓ είναι ισοσκελές.

12. Διπλώστε ένα τετράγωνο χαρτί ΑΒΓΔ στο μέσον του, κατόπιν ξεδιπλώστε το ώστε να φαίνεται το ίχνος της ευθείας α κατά μήκος της οποίας διπλώθηκε το χαρτί (όπως στο σχήμα). Μετά ξανά-διπλώστε το χαρτί από τη γωνία Β έως ότου το σημείο Β να πέσει σε σημείο Ζ της α, ενώ το Α παραμένει στη θέση του.
Κατόπιν, ξεδιπλώστε το χαρτί, ώστε να φανεί το ίχνος της ευθείας β κατά μήκος της οποίας διπλώσαμε. Να αποδείξετε ότι η οξεία γωνία των ευθειών α και β είναι $60°$ μοίρες.



13. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από δύο σταθερά σημεία Α και Β.

14. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κορυφών Α των τριγώνων ΑΒΓ, τα οποία έχουν σταθερή πλευρά ΒΓ και τη διάμεσο ΑΜ με γνωστό μήκος.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

1. Ισότητα τριγώνων

Δύο τρίγωνα είναι ίσα, όταν μπορούμε να τοποθετήσουμε το ένα πάνω στο άλλο ακριβώς.Δύο ίσα τρίγωνα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα.

Α) Κριτήρια ισότητας τριγώνων

Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν:

Κριτήριο ΠΓΠ: Δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

Κριτήριο ΓΠΓ: Μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτήν γωνίες ίσες μία προς μία.

Κριτήριο ΠΠΠ: Τις τρεις πλευρές τους μία προς μία ίσες.

Επειδή το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180°, αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά, την απέναντι και μία προσκείμενη σε αυτήν γωνίες ίσες μία προς μία, είναι ίσα.

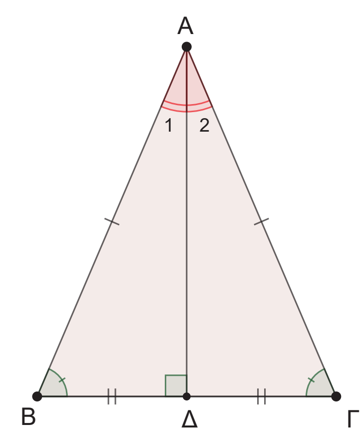
Β) Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν:

- Δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία.
- Μία αντίστοιχη πλευρά ίση και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

2. Ισοσκελές τρίγωνο

Αν ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο τότε έχει:

- δύο πλευρές ίσες,
- τις παρά τη βάση γωνίες του ίσες,
- τη διχοτόμο, το ύψος και τη διάμεσο που άγονται από την κορυφή να ταυτίζονται μεταξύ τους.



Για να δείξουμε ότι ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές αρκεί:

- να έχει δύο πλευρές ίσες,
- να έχει δύο γωνίες ίσες,
- μία διάμεσός του να είναι και ύψος ή διχοτόμος,
- ένα ύψος του να είναι και διχοτόμος ή διάμεσος,
- μία διχοτόμος του να είναι και ύψος ή διάμεσος.

3. Διχοτόμος γωνίας

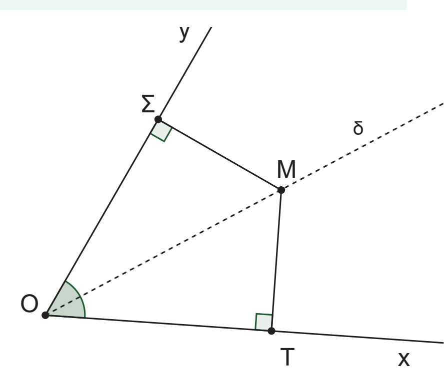
Ορισμός

Διχοτόμος γωνίας λέγεται η ημιευθεία που χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες.

Βασική ιδιότητα

Τα σημεία της διχοτόμου είναι τα μόνα σημεία της γωνίας που ισαπέχουν από τις πλευρές της.

Άρα, διχοτόμος γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων της γωνίας που ισαπέχουν από τις πλευρές της.



4. Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος

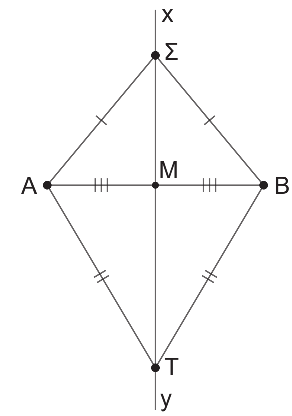
Ορισμός

Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος λέγεται η ευθεία που είναι κάθετη στο μέσο του τμήματος.

Βασική ιδιότητα

Τα σημεία της μεσοκαθέτου είναι τα μόνα σημεία του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος.

Άρα μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος.



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΦΥΛΛΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Ερωτήσεις θεωρίας (Μονάδες 2 x 5 = 10)

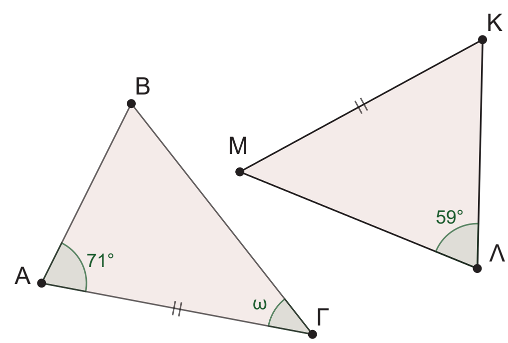
1η: Να διατυπώσετε τα τρία κριτήρια ισότητας δύο τυχαίων τριγώνων.

2η: Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας δύο ορθογώνιων τριγώνων.

3η: Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζονται τα ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και ΜΚΛ. Αν ΑΓ=ΜΚ και $\hat{A} = 71^\circ$ και $\hat{\Lambda} = 59^\circ$, να υπολογίσετε σε μοίρες τη γωνία ω.

4η: Να ορίσετε τη διχοτόμο μιας γωνίας ως γεωμετρικό τόπο.

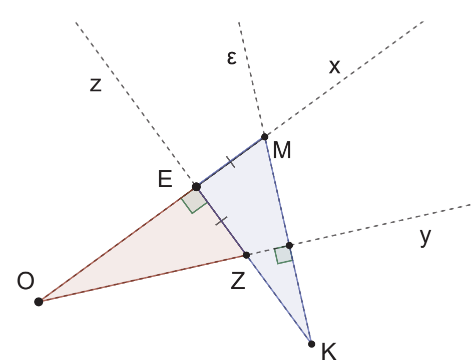
5η: Να ορίσετε τη μεσοκάθετο ενός ευθύγραμμου τμήματος ως γεωμετρικό τόπο.



Ασκήσεις (5 + 5 = 10 μονάδες)

Άσκηση 1η:

Στο διπλανό σχήμα οι ημιευθείες Ox και Kz, όπως και οι Oy και $K\varepsilon$, είναι κάθετες μεταξύ τους.
Αν ισχύει ότι $EZ = EM$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΕΖ και ΚΕΜ είναι ίσα μεταξύ τους.



Άσκηση 2η:

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $\hat{A} = 90^\circ$ είναι $B\Gamma = 2AB$. Αν ΒΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ανισοτικές σχέσεις
Εφαπτομένη κύκλου

3.1
Ανισοτικές σχέσεις στο τρίγωνο

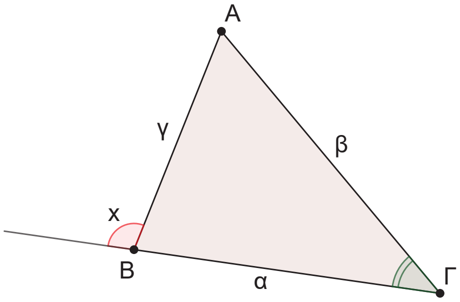
Τι καινούργιο υπάρχει στην ενότητα

Στις παρακάτω σελίδες:

- μαθαίνουμε βασικές ανισοτικές σχέσεις μεταξύ των στοιχείων ενός τριγώνου.

Απαραίτητες γνώσεις

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε μόνο με την ισότητα γεωμετρικών μεγεθών, τμημάτων και γωνιών. Στην παράγραφο αυτή, θα αναζητήσουμε σχέσεις ανισότητας μεταξύ των κύριων στοιχείων ενός τριγώνου. Θα διατυπώσουμε προτάσεις με τις οποίες θα είμαστε σε θέση να συγκρίνουμε τα μεγέθη αυτά.



Σχήμα 1

Κατ' αρχήν, υπάρχουν προτάσεις που προκύπτουν άμεσα από το γεγονός ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180^o, όπως:

Α) Η εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από κάθε μία από τις απέναντι εσωτερικές π.χ. $\hat{B}_{εξ} > \hat{Γ}$, $\hat{B}_{εξ} > \hat{A}$. (Σχ.1)

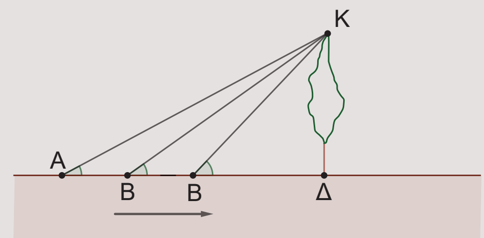
Β) Ένα τρίγωνο έχει το πολύ μία ορθή γωνία ή το πολύ μία αμβλεία γωνία.

Γ) Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η μεγαλύτερη γωνία είναι η ορθή.

Δ) Σε ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο η μεγαλύτερη γωνία είναι η αμβλεία.

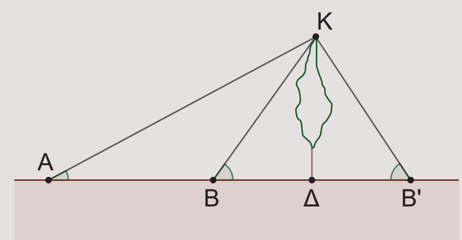
Δραστηριότητα

Από την εμπειρία μας καταλαβαίνουμε ότι όσο πλησιάζουμε ένα δένδρο, τόσο η γωνία με την οποία παρατηρούμε ολόκληρο το δένδρο, από τη βάση του ως την κορυφή του, μεγαλώνει. Αντιθέτως, οι αποστάσεις από το σημείο παρατήρησης ως την κορυφή του δένδρου συνεχώς μικραίνουν.



Άρα στις θέσεις Α και Β θα ισχύουν $\hat{A} < \hat{B}$ και $AK > BK$.

Ας φανταστούμε, λοιπόν, δύο φίλους τον Άρη και τον Βασίλη. Ο Άρης στέκεται ακίνητος και παρατηρεί το δένδρο με γωνία $\hat{A}$ και ο Βασίλης παρατηρεί το δένδρο από δύο θέσεις, τις B και B' ώστε $B\Delta = B'\Delta$.

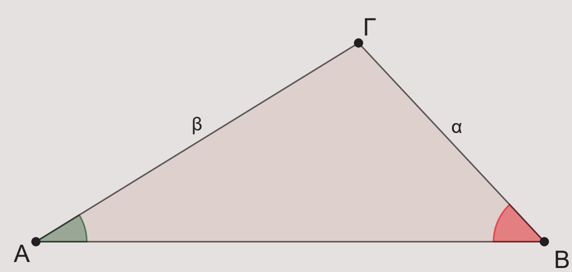


Συγκρίνετε στο τρίγωνο:

- ABK τις πλευρές AK και BK όπως και τις σημειωμένες γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{B}$.
- BKB' τις πλευρές BK και $B'K$ όπως και τις σημειωμένες γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{B}'$.
- AKB' τις πλευρές AK και $B'K$ όπως και τις σημειωμένες γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{B}'$.

Ας αφαιρέσουμε τώρα από την ιστορία μας το δένδρο και ας δούμε το τρίγωνο $AB\Gamma$.

Αν γνωρίζουμε ότι $\alpha < \beta$ τι υποψιάζεστε ότι ισχύει για τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{B}$ και αντίστροφα, αν γνωρίζουμε ότι $\hat{A} < \hat{B}$, τι υποψιάζεστε ότι ισχύει για τις πλευρές α και β.



Ας δούμε τι έχει προκύψει

ΘΕΩΡΗΜΑ

Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα. (Σχ.2)

Αποδειξη

Ευθύ: Αν $AB < A\Gamma$ τότε $\hat{\Gamma} < \hat{B}$.

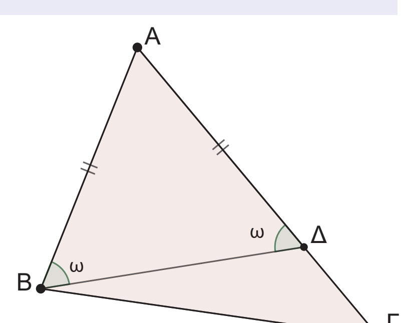
Επειδή $A\Gamma > AB$ θα υπάρχει σημείο Δ της $A\Gamma$ ώστε $A\Delta = AB$.

Τότε το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές, άρα $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Delta}B = \omega$. (1)

Αλλά, η $A\hat{\Delta}B$ ως εξωτερική γωνία στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ θα είναι $A\hat{\Delta}B > \hat{\Gamma}$. (2)

Συγχρόνως, από το σχήμα έχουμε ότι $A\hat{B}\Delta < \hat{B}$. (3)

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1), (2) και (3) έχουμε $\hat{\Gamma} < A\hat{\Delta}B = \omega = A\hat{B}\Delta < \hat{B}$.



Σχήμα 2

Αντίστροφο: Αν $\hat{\Gamma} < \hat{B}$ τότε ΑΒ < ΑΓ.
Για την απόδειξη του αντιστρόφου θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της **εις άτοπο απαγωγής.**

Ας αναλογιστούμε τι αποδείξαμε προηγουμένως.

Για παράδειγμα, αν σε ένα τρίγωνο έχουμε πλευρές με μήκη α = 7, β = 5 και γ = 3 τότε θα ισχύει $\hat{A} > \hat{B} > \hat{\Gamma}$, γιατί απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά έχουμε και τη μεγαλύτερη γωνία.

Για το αντίστροφο θα πρέπει να αποδείξουμε ότι δεν μπορεί να ισχύουν οι σχέσεις $AB = A\Gamma$ και $AB > A\Gamma$
Έστω ότι ισχύει ΑΒ = ΑΓ, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, **άτοπο.**
Άρα δεν μπορεί να ισχύει $AB = A\Gamma$.
Έστω ότι ισχύει $AB > A\Gamma$, τότε από το ορθό του θεωρήματος θα ισχύει $\hat{\Gamma} > \hat{B}$, **άτοπο.**
Άρα δεν μπορεί να ισχύει $AB > A\Gamma$. Αφού δεν ισχύει $AB = A\Gamma$ και $AB > A\Gamma$ θα είναι $AB < A\Gamma$. ■

Άμεσο συμπέρασμα της προηγούμενης πρότασης είναι ότι:

Αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι ορθή ή αμβλεία, τότε η απέναντι πλευρά της είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.

Δραστηριότητα

Ανοίξτε την εφαρμογή GeoGebra μέσω του συνδέσμου,
αλλάξτε τιμές στους δρομείς παρατηρείστε.
Βγάλτε ένα συμπέρασμα για το πότε τρία τμήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή ενός τριγώνου με πλευρές τα τμήματα αυτά;
Χρησιμοποιώντας διαβήτη και χάρακα προσπαθήστε, να κατασκευάσετε τρίγωνο με μήκη πλευρών.
1. α = 8, β = 5 και γ = 6 **2.** α = 8, β = 5 και γ = 3 **3.** α = 8, β = 4 και γ = 3

Ας δούμε τι έχει προκύψει

Από τα παραπάνω καταλήγουμε στην πρόταση που ονομάζεται «Τριγωνική ανισότητα».
Δηλαδή, **«Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων».**

Άρα, αν α, β, γ οι πλευρές του τριγώνου, τότε θα ισχύουν α < β + γ (1), αλλά και $\beta < \alpha + \gamma \Rightarrow \beta - \gamma < \alpha$.
Επειδή στη γεωμετρία η διαφορά δύο τμημάτων είναι θετικός αριθμός, (αφαιρούμε από το μεγαλύτερο ευθύγραμμο τμήμα το μικρότερο), γράφουμε ότι $|\beta - \gamma| < \alpha$ (2).
Από (1) και (2) καταλήγουμε στη σχέση $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$.
Παρόμοια θα ισχύουν και $|\alpha - \gamma| < \beta < \alpha + \gamma$, $|\alpha - \beta| < \gamma < \alpha + \beta$.
Βέβαια, στο ερώτημα αν μπορούμε να φτιάξουμε τρίγωνο με πλευρές π.χ. α = 8, β = 5 και γ = 6 δεν χρειάζεται να εξετάσουμε όλες τις περιπτώσεις, αλλά αρκεί απλώς **η μεγαλύτερη πλευρά να είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων.**
Διότι, αν ισχύει η σχέση αυτή αναγκαστικά θα ισχύουν και οι άλλες.
Μέσω παραδειγμάτων και παρατήρησης καταλήξαμε στην ανισότητα που ονομάζουμε τριγωνική, η απόδειξή της, όμως, βασίζεται στο προηγούμενο θεώρημα. Ας την δούμε.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των άλλων δύο και μεγαλύτερη από την απόλυτη τιμή της διαφοράς τους. (Σχ.3)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ θα αποδείξουμε ότ $\alpha < \beta + \gamma$.

Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ προς το Α κατά τμήμα ΑΔ = ΑΓ = β.

Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_1$.

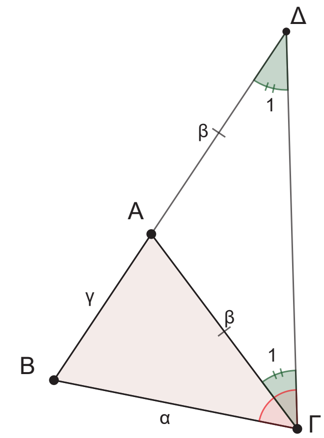
Επίσης είναι $\hat{\Gamma}_1 < \mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta$.

Οπότε, στο τρίγωνο ΒΔΓ είναι $\hat{\Delta}_1 < \mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta$ άρα $\mathrm{B\Gamma} < \Delta\mathrm{B} \Rightarrow \alpha < \beta + \gamma$

Όμοια μπορούμε να δείξουμε και ότι $\beta < \alpha + \gamma$ και $\gamma < \alpha + \beta$.

Από όπου έχουμε $\beta - \gamma < \alpha$, αν $\beta \geq \gamma$ ή $\gamma - \beta < \alpha$, αν $\gamma \geq \beta$.

Επομένως $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$. ■



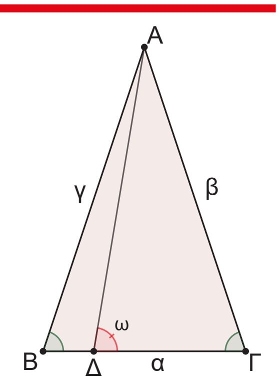
Σχήμα 3

Ας καταγράψουμε όσα έχουμε αναφέρει μέχρι τώρα.

1. Η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από κάθε μία από τις απέναντί της εσωτερικές.
2. Στο ορθογώνιο τρίγωνο η μεγαλύτερη πλευρά είναι η υποτείνουσα.
3. Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα.
4. Κάθε πλευρά ενός τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών και μεγαλύτερη από την απόλυτη τιμή της διαφοράς τους.
5. Τρία τμήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή ενός τριγώνου, αν το μεγαλύτερο από αυτά είναι μικρότερο από το άθροισμα των δύο άλλων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Αν Δ τυχαίο σημείο της βάσης ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι ΑΔ < ΑΒ.



ΛΥΣΗ

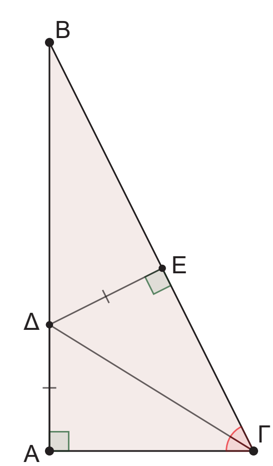
Επειδή το ΑΒΓ είναι ισοσκελές έχουμε ότι ΑΒ = ΑΓ.

Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $\mathrm{A}\Delta < \mathrm{A\Gamma}$.

Τα ΑΔ και ΑΓ είναι πλευρές του ΑΓΔ, άρα αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{\Gamma} < \omega$ ή $\hat{\mathrm{B}} < \omega$ αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Το οποίο ισχύει, γιατί η ω είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ΑΒΔ.

2. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{\mathrm{A}} = 90°$), η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Να αποδείξετε ότι ΑΔ < ΔΒ.



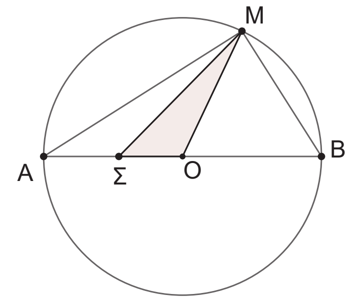
ΛΥΣΗ

Αν $\Delta\mathrm{E} \perp \mathrm{B\Gamma}$ από ιδιότητα διχοτόμου έχουμε ότι ΔΕ = ΑΔ.

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι $\Delta\mathrm{E} < \Delta\mathrm{B}$, που ισχύει διότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ορθογώνιο και η υποτείνουσα είναι η μεγαλύτερη πλευρά. Άρα ΑΔ < ΔΒ.

3. **Έστω κύκλος (Ο,ρ) διαμέτρου ΑΒ και σημείο Σ του ευθύγραμμου τμήματος ΟΑ.**

Για κάθε σημείο Μ του κύκλου να αποδείξετε ότι $ΣΑ \le ΣΜ \le ΣΒ$.

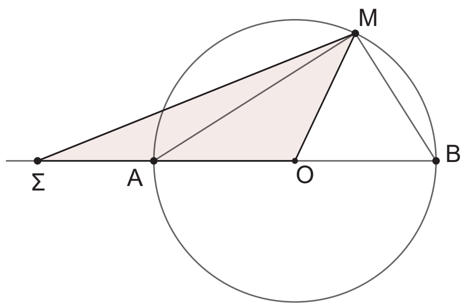


ΛΥΣΗ

Έστω το σημείο Μ σε μία τυχαία θέση, όπως στο διπλανό σχήμα.
Η διπλή ανισοτική σχέση μας παραπέμπει στο να εφαρμόσουμε την τριγωνική ανισότητα σε τρίγωνο που θα έχει πλευρά το ΣΜ.
Πράγματι, στο ΣΟΜ έχουμε διαδοχικά:

$$|ΟΜ - ΣΟ| < ΣΜ < ΣΟ + ΟΜ \overset{ΟΜ=ρ}{\Leftrightarrow} |ρ - ΣΟ| < ΣΜ < ΣΟ + ρ \overset{ρ=ΟΑ=ΟΒ}{\Leftrightarrow}$$

$$|ΑΟ - ΣΟ| < ΣΜ < ΟΒ + ΣΟ \Leftrightarrow ΣΑ < ΣΜ < ΣΒ$$

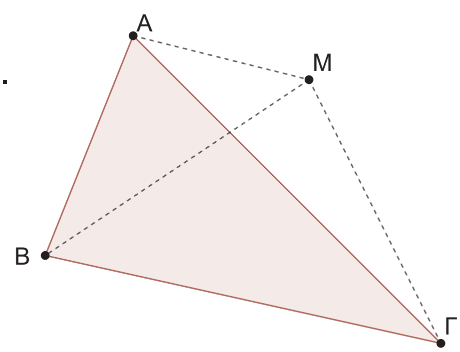


Στην περίπτωση όπου το σημείο Μ συμπέσει με το Α τότε θα είναι $ΣΑ = ΣΜ < ΣΒ$, ενώ αν συμπέσει με το Β θα είναι $ΣΑ < ΣΜ = ΣΒ$.
Άρα, σε κάθε περίπτωση θα είναι $ΣΑ \le ΣΜ \le ΣΒ$.

Δουλέψτε παρόμοια στην περίπτωση του διπλανού σχήματος, όπου το σημείο Σ ανήκει στην προέκταση της ΟΑ προς το Α.

4. **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Μ, όπως στο διπλανό σχήμα.**

Να αποδείξετε ότι $τ < ΜΑ + ΜΒ + ΜΓ$ (όπου $τ = \dfrac{α+β+γ}{2}$).



ΛΥΣΗ

Η σχέση γράφεται ισοδύναμα:

$$\frac{ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ}{2} < ΜΑ + ΜΒ + ΜΓ \Leftrightarrow ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ < 2(ΜΑ + ΜΒ + ΜΓ)$$

Η μορφή της ζητούμενης σχέσης παραπέμπει στην τριγωνική ανισότητα, σίγουρα όμως σε περισσότερα τρίγωνα.

Πράγματι έχουμε διαδοχικά:

στο τρίγωνο ΒΜΓ: $ΒΓ < ΜΒ + ΜΓ$ (1), στο τρίγωνο ΑΜΓ: $ΑΓ < ΜΑ + ΜΓ$ (2) και

στο τρίγωνο ΑΒΜ: $ΑΒ < ΜΑ + ΜΒ$ (3).

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1), (2), και (3) κατά μέλη έχουμε $ΒΓ + ΑΓ + ΑΒ < 2(ΜΑ + ΜΒ + ΜΓ)$.

Ερωτήσεις κατανόησης

1. Υπάρχει τρίγωνο με πλευρές α, β και γ τέτοιες ώστε $α = \dfrac{γ}{3}$ και $β = \dfrac{3}{5}γ$; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

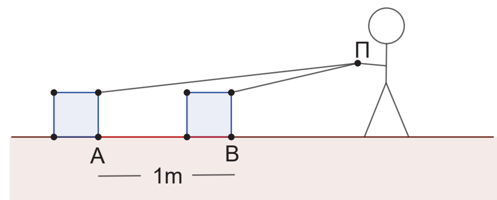
2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = 4, ΑΓ = 5 και ΒΓ = α να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών μπορεί να είναι το μήκος α.

3. Στις εφημερίδες εμφανίστηκε η εξής διαφήμιση. **Προσφορά - Ευκαιρία!** Πωλείται παραθαλάσσια έκταση στη Μύκονο με 4 Km δικιά της παραλία. Το οικόπεδο είναι τριγωνικό με πλευρές: 4 Km (η παραλία) x 7 Km x 2 Km προς τον αμπελώνα. Τιμή 10.000 ευρώ, **ΠΡΟΛΑΒΕΤΕ!**
Τι λέτε το αγοράζουμε;

4. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρές α = 5, β = 6 και γ =4. Ποια γωνία του είναι η μικρότερη και ποια η μεγαλύτερη.

5. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ η γωνία $\hat{Α}$ είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των γωνιών $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$. Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τα τμήματα $\frac{α}{2}$, $γ$, $μ_α$, όπου α και γ πλευρές του και $μ_α$ η διάμεσός του.

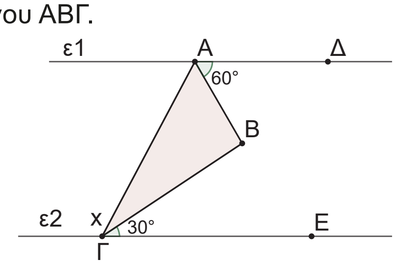
6. Ο Πέτρος παίζοντας με το τρενάκι το έφερε πιο κοντά του κατά ένα μέτρο. Το σχοινί που μάζεψε έχει μήκος μεγαλύτερο, μικρότερο ή ίσο με ένα μέτρο. Να δικαιολογήσετε τη σκέψη σας.



7. Δύο χωριά Α και Β χωρίζονται από έναν αυτοκινητόδρομο. Πρόκειται να κατασκευαστεί δρόμος που θα συνδέει τα δύο χωριά με τη βοήθεια γέφυρας πάνω από τον δρόμο. Σε πιο σημείο Γ πρέπει να κατασκευαστεί η γέφυρα, ώστε το συνολικό μήκος της διαδρομής να είναι το ελάχιστο δυνατό;

Ασκήσεις και Προβλήματα

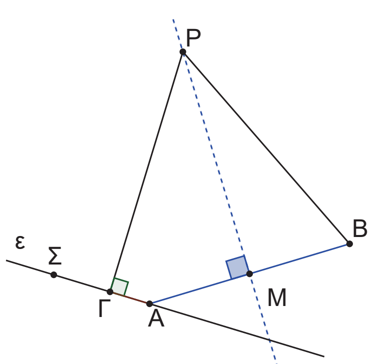
1. Στο παρακάτω σχήμα είναι $ε_1 \parallel ε_2$ και η ΑΒ διχοτόμος της γωνίας $Γ\hat{Α}Δ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες x και $Α\hat{Β}Γ$, μετά να διατάξετε από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ.



2. Δίνεται τμήμα ΑΒ, σημείο Ρ της μεσοκαθέτου του και μια ευθεία ε που διέρχεται από το Α.

α) Συγκρίνετε τις αποστάσεις του Ρ από την ευθεία ε και το σημείο Β.

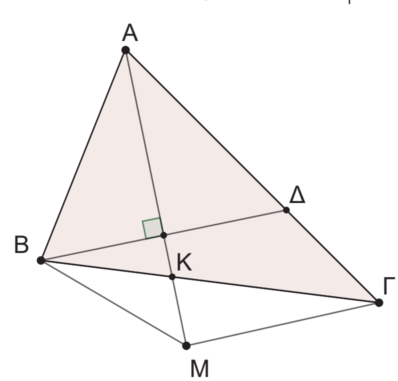
β) Ποια πρέπει να είναι η θέση της ευθείας ε, ώστε οι αποστάσεις αυτές να είναι ίσες;



3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Μ τυχαίο σημείο της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι $2ΑΜ + ΒΓ > ΑΒ + ΑΓ$.

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$ και η διχοτόμος του ΑΚ. Αν ΒΔ κάθετη στην ΑΚ (όπως στο σχήμα) και Μ τυχαίο σημείο της διχοτόμου, να αποδείξτε ότι:

α) $ΔΓ = ΑΓ - ΑΒ$ **β)** $ΑΓ - ΑΒ > |ΜΓ - ΜΒ|$



5. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ να αποδείξετε ότι:

Αν $ΑΜ > \frac{ΒΓ}{2}$ τότε $\hat{Α} < \hat{Β} + \hat{Γ}$.

Τι θα ισχύει όταν $ΑΜ < \frac{ΒΓ}{2}$ ή όταν $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2}$;

Να δικαιολογείσετε τον ισχυρισμό σας.

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ < ΑΓ)$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Να αποδείξτε ότι:

α) ΒΔ < ΑΒ και ΔΓ < ΑΓ.

β) $2ΑΔ < ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ$.

7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$ και η διάμεσος ΑΜ. Προεκτείνετε την ΑΜ κατά τμήμα ΜΔ=ΑΜ. Να αποδείξετε ότι:

1) Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΔ είναι ίσα.

2) $M\hat{A}B > M\hat{A}Γ$.

3) $\dfrac{β-γ}{2} < μ_α < \dfrac{β+γ}{2}$.

8. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι $ΒΔ < ΔΓ$.

9. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα ύψη ΓΕ και ΒΔ που τέμνονται στο Η. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΒΗ > ΕΒ$ και $ΗΓ > ΔΓ$.

β) $ΒΔ + ΕΓ > ΕΒ + ΕΔ + ΔΓ$.

10. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Από το Δ φέρουμε ΔΛ κάθετη στην ΑΒ και ΔΚ κάθετη στην ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

α) $ΔΚ < ΔΒ$ και $ΔΛ < ΔΓ$.

β) $ΛΚ < ΒΓ$.

11. Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Ο εσωτερικό σημείο του. Να αποδείξετε ότι:

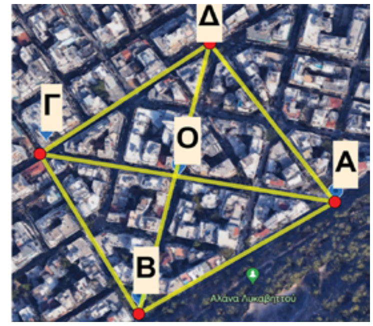
α) $ΟΑ + ΟΒ + ΟΓ + ΟΔ > \dfrac{ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ}{2}$.

β) $ΑΓ + ΒΔ \le ΟΑ + ΟΒ + ΟΓ + ΟΔ$.
Για ποια θέση του Ο το άθροισμα $ΟΑ + ΟΒ + ΟΓ + ΟΔ$ γίνεται ελάχιστο;

Υπόδειξη για το β΄ ερώτημα:
Θεωρείστε τις περιπτώσεις, το Ο:
- να μην είναι σημείο των ΑΓ και ΒΔ,
- να είναι σημείο μόνο μιας εκ των ΑΓ και ΒΔ,
- να είναι το σημείο τομής των ΑΓ και ΒΔ.

12. Ο χαλασμένος μετρητής

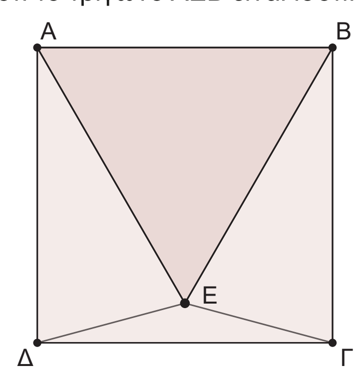
Στον παρακάτω χάρτη παρουσιάζονται πέντε σημεία Ο,Α,Β,Γ και Δ. Έχουμε μετρήσει τις αποστάσεις $ΔΒ = 251\,m$ και $ΓΑ = 274\,m$.
Μια μέρα στην καθημερινή μας άσκηση κάναμε τη διαδρομή $ΑΒ \to ΒΓ \to ΓΔ \to ΔΑ$.



Στο τέλος ο ηλεκτρονικός μετρητής αποστάσεων του ρολογιού μας έδειξε ότι περπατήσαμε περίπου 1.100 m. Πόσο αξιόπιστος μπορεί να είναι;

13. Μία αξιοπρόσεκτη άσκηση

Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και στο εσωτερικό του σημείο Ε ώστε $E\hat{Δ}Γ = E\hat{Γ}Δ = 15^\circ$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ισόπλευρο.



Η άσκηση αυτή παρουσιάζει αρκετή δυσκολία. Για να υπάρξει η χαρά της λύσης ακολουθήστε τα βήματα-οδηγίες και προσπαθήστε να καταλήξετε στο ζητούμενο συμπέρασμα.

α) Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΕ είναι ίσα μεταξύ τους.

β) Αποδείξτε ότι το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ισοσκελές.

γ) Θέτοντας τη γωνία $E\hat{B}Γ = x$ εκφράστε τις γωνίες του σχήματος συναρτήσει του x.

δ) Υποθέστε ότι $x < 30^\circ$ και διατάσσοντας τις πλευρές των τριγώνων ΕΒΓ και ΑΕΒ καταλήξτε σε άτοπο.

ε) Όμοια υποθέτοντας ότι $x > 30^\circ$ διατάξτε τις πλευρές των τριγώνων ΕΒΓ και ΑΕΒ και καταλήξτε σε άτοπο.

ζ) Ποιο το συμπέρασμά σας από τα δύο προηγούμενα βήματα;

14. Το σημείο του Ήρωνα

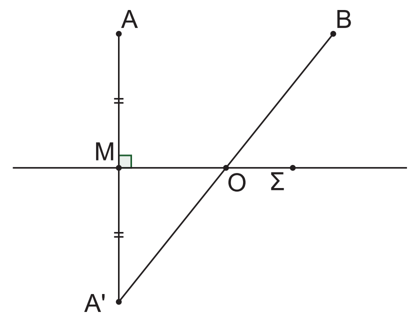
Στο σχήμα που ακολουθεί θεωρούμε τα σημεία Α, Β προς το ίδιο μέρος μιας ευθείας. Από το Α φέρουμε κάθετο προς την ευθεία και θεωρούμε σημείο A' ώστε $AM = A'M$ (A' συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία). Φέρουμε την $A'B$ που τέμνει την ευθεία στο Ο.

Να αποδείξετε ότι:

α) $OA = OA'$.

β) Αν Σ τυχαίο σημείο της ευθείας, διαφορετικό του σημείου Μ, τότε το τρίγωνο $AΣA'$ είναι ισοσκελές.

γ) Ισχύει ότι $ΣA + ΣB \geq OA + OB$.



Στιγμές από την ιστορία των μαθηματικών

Ο **Ήρων ο Αλεξανδρινός** (10μ.Χ – 75μ.Χ), ήταν μηχανικός, μαθηματικός και εφευρέτης. Διευθυντής της Τεχνικής σχολής της Αλεξάνδρειας, το πολυτεχνείο της εποχής. Γνωστός για μηχανισμούς που κατασκεύαζε και λειτουργούσαν (αυτόματα) με τη δύναμη του ατμού. Σ΄ αυτόν αποδίδεται το λεγόμενο Σημείο του Ήρωνα. Πρόκειται για το εξής πρόβλημα.

Αν ε μία ευθεία και Α, Β δύο σημεία προς το ίδιο μέρος της, να βρεθεί σημείο Μ της ε ώστε το άθροισμα ΜΑ + ΜΒ να γίνεται ελάχιστο.

Πρόκειται για το πρώτο πρόβλημα μεγίστου - ελαχίστου που διατυπώθηκε. Συγχρόνως στο έργο του κατοπτρικά ο Ήρων καταλήγει στη βεβαιότητα ότι το φως ανακλάται ακολουθώντας την ελάχιστη διαδρομή. Δηλαδή, η διαδρομή που ακολουθεί μία φωτεινή ακτίνα από την πηγή Α μέχρι το μάτι μας, αφού πρώτα ανακλαστεί στον καθρέπτη, θα γίνει με βάση το προηγούμενο πρόβλημα.

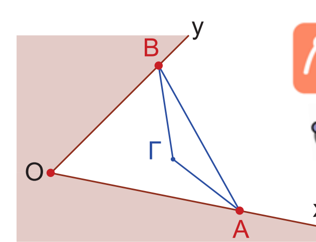
Τον Ήρωνα τον συναντάμε παίζοντας μπιλιάρδο. Η μπίλια ανακλάται στα τοιχώματα του μπιλιάρδου ακολουθώντας τις επιταγές του Ήρωνα!

Ακολουθώντας τη μέθοδο του Ήρωνα ασχοληθείτε με τα παρακάτω κλασικά προβλήματα:

Εργασία για το σπίτι

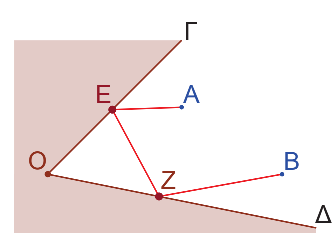
Πρόβλημα 1ο

Δίνεται σημείο Γ εσωτερικό γωνίας xOy. Να βρεθούν σημεία Α,Β των Ox, Oy αντίστοιχα, ώστε η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ να είναι η ελάχιστη δυνατή.



Πρόβλημα 2ο

Δύο τοίχοι ΟΓ και ΟΔ σχηματίζουν ο ένας με τον άλλον τυχαία γωνία. Δύο άτομα Α και Β είναι στραμμένα προς αυτούς. Σε ποια σημεία των δύο τοίχων πρέπει να τοποθετηθούν δύο καθρέπτες Ε και Ζ, ώστε να μπορούν τα δύο άτομα να βλέπονται; Έχοντας υπόψιν μας ότι το φως θα κινηθεί ακολουθώντας την συντομότερη διαδρομή, το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση της θέσης των Ε, Ζ, ώστε το άθροισμα $AE + EZ + ZB$ να είναι το ελάχιστο δυνατό.



3.2
Χορδή κύκλου

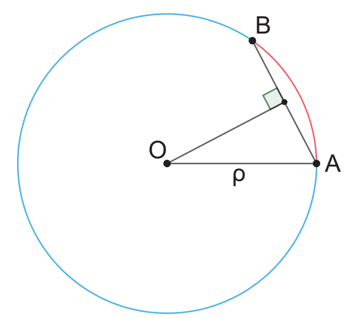
Τι καινούργιο υπάρχει στην ενότητα

Στις παρακάτω σελίδες:
- μαθαίνουμε τη σχέση που υπάρχει μεταξύ τόξων και αποστημάτων.

Απαραίτητες γνώσεις

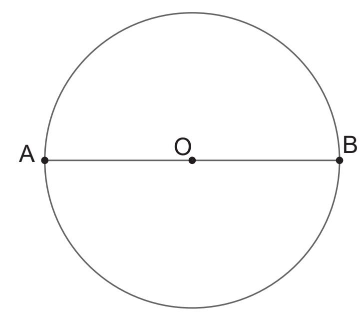
Έστω ο κύκλος (Ο, ρ) τότε:

Αν Α,Β σημεία του κύκλου το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ λέγεται **χορδή** του κύκλου, ενώ το κάθε ένα από τα δύο μέρη που χωρίζεται ο κύκλος, λέγεται **τόξο** $\overset{\frown}{AB}$.
Η απόσταση του κέντρου Ο από την χορδή ΑΒ, λέγεται **απόστημα** της χορδής. (Σχ.4)



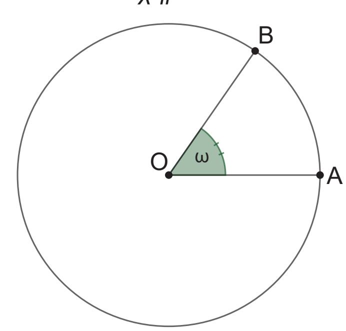
Σχήμα 4

Αν η χορδή ΑΒ διέρχεται από το κέντρο Ο του κύκλου, τότε λέγεται **διάμετρος** και τα σημεία Α,Β **αντιδιαμετρικά σημεία**. Στην περίπτωση αυτή, το κάθε ένα από τα δύο σχηματιζόμενα τόξα λέγονται **ημικύκλιο.** (Σχ.5)



Σχήμα 5

Αν ΟΑ και ΟΒ ακτίνες του κύκλου, τότε η γωνία $A\hat{O}B$ λέγεται **επίκεντρη** γωνία που **βαίνει** στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$. (Σχ.6)
Στην περίπτωση όπου $A\hat{O}B = 90^\circ$, τότε το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ λέγεται **τεταρτοκύκλιο**.

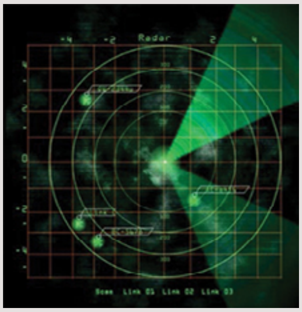


Σχήμα 6

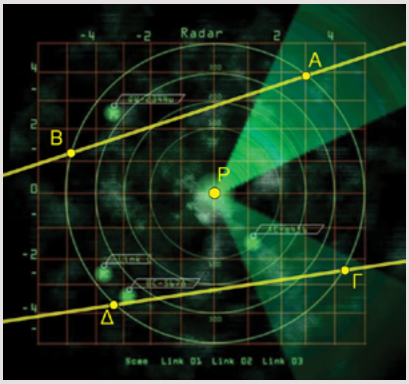
Ισχύει ότι στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους, **ίσες επίκεντρες γωνίες βαίνουν σε ίσα τόξα** και αντίστροφα, **σε ίσα τόξα αντιστοιχούν ίσες επίκεντρες γωνίες.**

Δραστηριότητα

Το Ραντάρ
Ένα ραντάρ εκπέμπει ραδιοκύματα, τα οποία αφού ανακλαστούν στο αντικείμενο επιστρέφουν στην πηγή. Με βάση τον χρόνο ανάμεσα στην εκπομπή και τη λήψη του σήματος, υπολογίζεται και η απόσταση του αντικειμένου από το ραντάρ. Το σήμα που λαμβάνουμε γίνεται ολοένα και πιο ισχυρό, καθώς το αντικείμενο βρίσκεται πιο κοντά στη θέση του ραντάρ.
Μια μέρα δύο αεροπλάνα βρέθηκαν στον χώρο ευθύνης του ραντάρ. Το 1ο κινήθηκε κατά μήκος του τμήματος ΑΒ και το δεύτερο κατά μήκος του ΓΔ.



Ο χειριστής θέλει να γνωρίζει ποια από τις δύο διαδρομές, είναι μεγαλύτερη ή αν είναι ίσες. Διαπιστώνει από τις μετρήσεις που του δίνει το σύστημα ότι και τα δύο αεροσκάφη βρέθηκαν πλησιέστερα της βάσης του ραντάρ σε ίσες αποστάσεις.
Το συμπέρασμα που καταλήγει είναι ότι ΑΒ = ΓΔ, έχει δίκιο και γιατί; Αν οι αποστάσεις ήταν άνισες, σε ποιο συμπέρασμα θα κατέληγε ο χειριστής του ραντάρ;



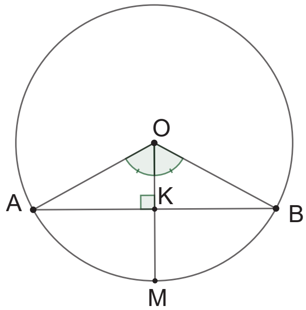
Ας δούμε τι έχει προκύψει

Από την παραπάνω δραστηριότητα, καταλήγουμε στα παρακάτω συμπεράσματα που αναφέρονται σε χορδές-αποστήματα και τόξα ενός κύκλου, που οι αποδείξεις τους είναι απλές εφαρμογές των όσων γνωρίζουμε από την ισότητα τριγώνων και τις ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου.

Ισότητα τόξων, χορδών και αποστημάτων

ΘΕΩΡΗΜΑ

Η κάθετος που φέρουμε από το κέντρο ενός κύκλου προς μία χορδή του, διχοτομεί την χορδή και το αντίστοιχο τόξο της. (Σχ.7)



Σχήμα 7

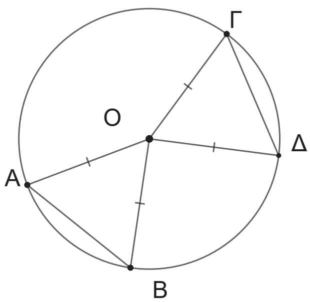
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΑΚ και ΟΒΚ.
Αυτά έχουν ΟΑ = ΟΒ ως ακτίνες κύκλου, ΟΚ κοινή πλευρά και είναι ορθογώνια, άρα από κριτήριο ορθογώνιων τριγώνων, τα τρίγωνα ΟΑΚ και ΟΚΒ είναι ίσα.

Άρα, θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα ένα προς ένα οπότε $ΑΚ = ΚΒ$ (λέμε ότι ΟΚ διχοτομεί, χωρίζει στη μέση, την χορδή ΑΒ) και $Α\hat{Ο}Κ = Κ\hat{Ο}Β$ οπότε και τα τόξα $\overset{\frown}{ΑΜ}$ και $\overset{\frown}{ΜΒ}$ είναι ίσα, ως τόξα στα οποία βαίνουν οι ίσες επίκεντρες γωνίες. ■

ΘΕΩΡΗΜΑ

Όταν δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες, τότε τα αντίστοιχα τόξα τους είναι ίσα και αντιστρόφως. (Σχ.8)



Σχήμα 8

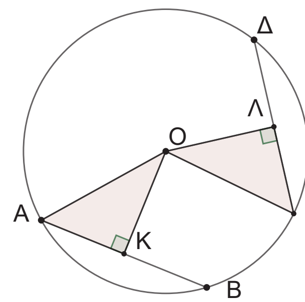
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ευθύ: Αν $ΑΒ = ΓΔ$ τότε $\overset{\frown}{ΑΒ} = \overset{\frown}{ΓΔ}$. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ.

Αυτά έχουν τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία, άρα από κριτήριο ΠΠΠ θα είναι ίσα. Οπότε θα έχουν και όλα τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ένα προς ένα ίσα. Άρα $Α\hat{Ο}Β = Γ\hat{Ο}Δ$, όμως ίσες επίκεντρες σημαίνει και ίσα τα αντίστοιχα τόξα στα οποία βαίνουν, άρα $\overset{\frown}{ΑΒ} = \overset{\frown}{ΓΔ}$.
Αντίστροφο: Αν $\overset{\frown}{ΑΒ} = \overset{\frown}{ΓΔ}$ τότε $ΑΒ = ΓΔ$.
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΟΑΒ$ και $ΟΓΔ$.
Έχουν τις $ΟΑ = ΟΓ$ και $ΟΒ = ΟΔ$ ως ακτίνες του κύκλου και τις επίκεντρες γωνίες $Α\hat{Ο}Β, Γ\hat{Ο}Δ$ ίσες επειδή βαίνουν σε ίσα τόξα. Άρα από κριτήριο ΠΓΠ είναι ίσα, άρα θα έχουν και όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, ένα προς ένα. Οπότε θα είναι και ΑΒ = ΓΔ. ■

ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αντίστοιχα αποστήματα τους είναι ίσα. (Σχ.9)



Σχήμα 9

Ευθύ: Αν $AB = \Delta\Gamma$ τότε $OK = O\Lambda$.
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα OAK και $O\Gamma\Lambda$. Έχουν:

$OA = O\Gamma$ (ως ακτίνες κύκλου)

$\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90^\circ$ (έχουμε φέρει τα αποστήματα)

$AK = \Lambda\Gamma$ (ως μισά των ίσων χορδών AB και $\Gamma\Delta$, καθώς τα αποστήματα **διχοτομούν** τις χορδές).

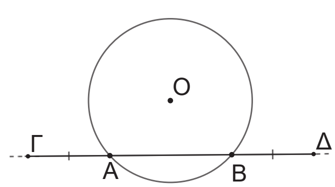
Οπότε από κριτήριο ισότητας ορθογώνιων τριγώνων, υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά είναι ίσα. Επομένως, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα ένα προς ένα. Άρα $OK = O\Lambda$.

Αντίστροφο: Αν $OK = O\Lambda$ τότε $AB = \Delta\Gamma$.

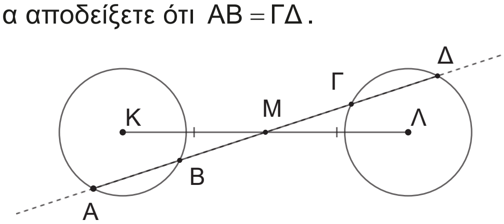
Τα τρίγωνα OAK και $O\Gamma\Lambda$ είναι ίσα (δικαιολογείστε το γιατί), οπότε θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα ένα προς ένα, άρα $AK = \Lambda\Gamma$.
Αλλά το απόστημα διχοτομεί την χορδή, οπότε θα είναι $AK = \Lambda\Gamma \Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{\Delta\Gamma}{2} \Rightarrow AB = \Gamma\Delta$. ■

Ασκήσεις

1. Δίνεται κύκλος κέντρου O και χορδή του AB. Προεκτείνουμε την AB και προς τα δύο της άκρα κατά ίσα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $O\hat{\Gamma}A = O\hat{\Delta}B$.



2. Θεωρούμε δύο ίσους κύκλους με κέντρα Κ και Λ και ευθεία ε που διέρχεται από το μέσο Μ του ΚΛ και τέμνει τους κύκλους στα σημεία A,B και Γ,Δ όπως στο σχήμα.
Να αποδείξετε ότι $AB = \Gamma\Delta$.

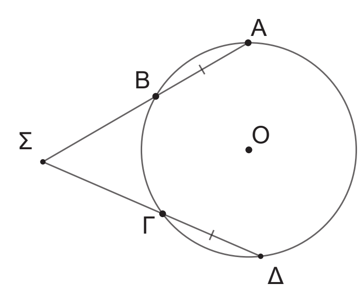


3. Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) και οι ίσες χορδές του ΑΒ και ΔΓ που προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο Σ. Να αποδείξετε ότι:

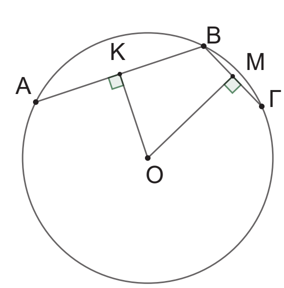
α) Η ΣΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Sigma}\Delta$

β) Το τρίγωνο ΣΑΔ είναι ισοσκελές.

γ) Η ΣΟ είναι μεσοκάθετος του ΑΔ.



4. Στο παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι ισχύει η ισοδυναμία $AB > B\Gamma \Leftrightarrow OK < OM$.



3.3
Εφαπτομένη κύκλου

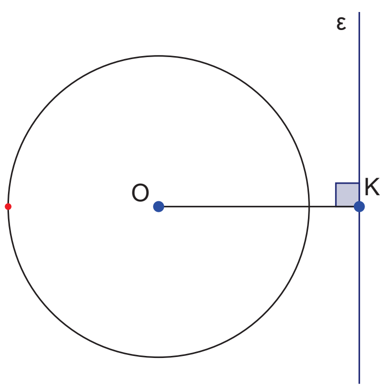
Τι καινούργιο υπάρχει στην ενότητα

Στις παρακάτω σελίδες:
- γνωρίζουμε τις σχετικές θέσεις μιας ευθείας και ενός κύκλου.
- μελετάμε τις σχετικές θέσεις δύο κύκλων.
- κατασκευάζουμε την εφαπτομένη κύκλου από ένα σημείο.

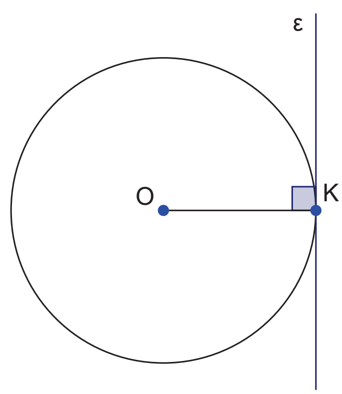
Ας θυμηθούμε πώς μπορεί να είναι σχεδιασμένος ένας κύκλος σε σχέση με μία ευθεία, αλλά και πώς μπορεί να είναι σχεδιασμένοι δύο κύκλοι μεταξύ τους;

Α. Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

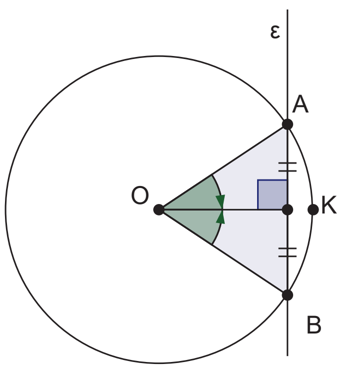
Αν σχεδιάσουμε μία ευθεία και έναν κύκλο, τότε το σχήμα μας μπορεί να μοιάζει με ένα από τα παρακάτω.



Σχήμα 10



Σχήμα 11



Σχήμα 12

Δραστηριότητα

Άνοιξε την εφαρμογή.
Άλλαξε τιμές στον δρομέα.
Πώς μπορεί να είναι σχεδιασμένη μία ευθεία σε σχέση με έναν κύκλο;
Ποια αλγεβρική σχέση υπάρχει μεταξύ της απόστασης του κέντρου ενός κύκλου από ευθεία και της ακτίνας του κύκλου, ανάλογα με τη σχετική τους θέση;

Ας δούμε τι έχει προκύψει

Ας ονομάσουμε d την απόσταση του κέντρου Ο του κύκλου (Ο, ρ) από την ευθεία ε τότε:

Αν d > ρ η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κοινά σημεία. (Σχ.10)

Αν d = ρ η ευθεία και ο κύκλος έχουν ένα κοινό σημείο. (Σχ.11)

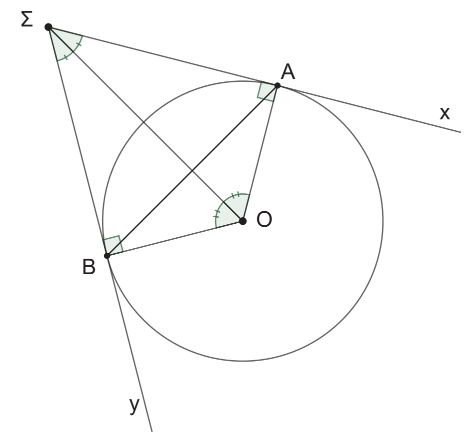
Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι **η ευθεία εφάπτεται του κύκλου** στο Κ που το ονομάζουμε **σημείο επαφής** και ισχύει $OK \perp \varepsilon$, δηλαδή η ε είναι κάθετη της ακτίνας ΟΚ το σημείο Κ.

Αν d < ρ η ευθεία και ο κύκλος έχουν δύο κοινά σημεία. (Σχ.12)

Ένα ιδιαίτερο σχήμα. (Σχ.13)

Όπως θα μας διδάξει παρακάτω ο Ευκλείδης από σημείο Σ εκτός του κύκλου (Ο, ρ) μπορούμε να φέρουμε δύο εφαπτόμενες, τις Σx και Σy. Αν Α και Β τα σημεία επαφής, τότε από τα ίσα τρίγωνα ΟΒΣ και (ΟΑΣ) (Γιατί;) έχουμε ότι:

Α) $ΣΑ = ΣΒ$ (τα **εφαπτόμενα τμήματα** που **άγονται** από το σημείο Σ είναι ίσα μεταξύ τους).
Β) η $ΟΣ$ είναι διχοτόμος των γωνιών $Β\hat{Σ}Α$ και $Β\hat{Ο}Α$.
Γ) η $ΟΣ$ είναι μεσοκάθετος του $ΑΒ$.



Σχήμα 13

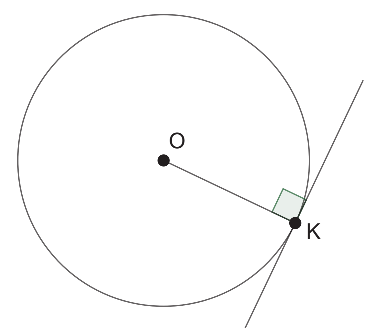
Σε τι χρησιμεύουν τα παραπάνω

Με τη βοήθεια όσων έχουν αναφερθεί είμαστε σε θέση να κατασκευάσουμε την εφαπτομένη ενός κύκλου.

1. Σε ένα σημείο Κ. (Σχ.14)

Δραστηριότητα

Περιγράψτε τις ενέργειες που πρέπει να κάνουμε, ώστε να κατασκευάσουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο του Κ.



Σχήμα 14

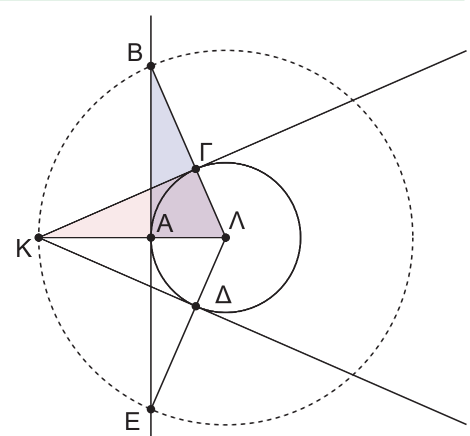
2. Από σημείο εκτός του κύκλου. (Σχ.15)

Στο 3ο βιβλίο των «Στοιχείων» ο Ευκλείδης παρουσιάζει την 17η πρόταση, που στα αρχαία Ελληνικά είναι διατυπωμένη ως εξής:

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ δοθέντος κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Μετά περιγράφει βήμα-βήμα την κατασκευή.

- Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τον κύκλο $(Λ,ρ)$ και το σημείο $Κ$ έξω από αυτόν.
- Φέρουμε την $ΚΛ$ και ονομάζουμε $Α$ το σημείο τομής της $ΚΛ$ και του κύκλου.
- Κατασκευάζουμε τον κύκλο $(Λ,ΚΛ)$.
- Κατασκευάζουμε την κάθετη στην $ΚΛ$ στο σημείο $Α$ που τέμνει τον κύκλο $(Λ,ΚΛ)$ στα σημεία $Β$ και $Ε$.
- Ονομάζουμε $Γ$ το σημείο τομής της $ΛΒ$ και του κύκλου $(Λ,ρ)$.
- Η $ΚΓ$ είναι η ζητούμενη εφαπτομένη.



Σχήμα 15

Μετά θέτει το ερώτημα γιατί η ΚΓ είναι η εφαπτομένη;
Συγκρίνοντας τα σχηματιζόμενα τρίγωνα $ΚΛΓ$ και $ΒΛΑ$ διαπιστώνουμε ότι είναι ίσα (έχουν $ΛΑ = ΛΓ = ρ$, $ΛΒ = ΛΚ$ ακτίνες του κύκλου $(Λ,ΛΚ)$ και η γωνία $Β\hat{Λ}Κ$ είναι κοινή), οπότε με βάση το κριτήριο ΠΓΠ είναι ίσα, άρα θα έχουν και όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ένα προς ένα ίσα. Επομένως $Κ\hat{Γ}Λ = Β\hat{Α}Λ$ και επειδή $Β\hat{Α}Λ = 90^\circ$, θα είναι και $Κ\hat{Γ}Λ = 90^\circ$ δηλαδή $ΚΓ \perp ΛΓ$, άρα η $ΚΓ$ είναι εφαπτομένη του κύκλου $(Λ,ρ)$.
Μετά διατυπώνει το ερώτημα, πόσες εφαπτόμενες μπορούμε να φέρουμε από το Κ;

Β. Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

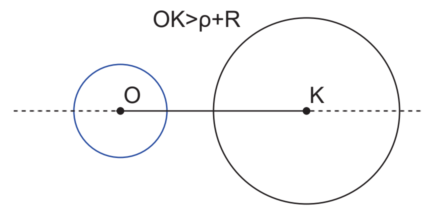
Όταν σχεδιάζουμε δύο κύκλους πώς μπορεί να είναι ο ένας σε σχέση με τον άλλο;

Δραστηριότητα

Άνοιξε την εφαρμογή. Άλλαξε τιμές στους δρομείς. Πως μπορεί να είναι σχεδιασμένοι δύο κύκλοι ο ένας σε σχέση με τον άλλο; Ποια αλγεβρική σχέση υπάρχει μεταξύ της απόστασης των κέντρων των δύο κύκλων **(διάκεντρος)** και των ακτίνων τους, ανάλογα με τη σχετική τους θέση;

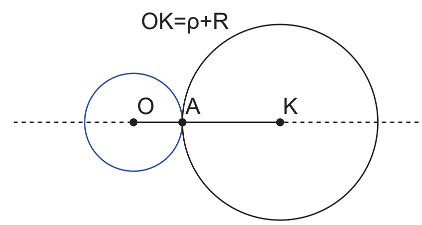
Ας δούμε τι έχει προκύψει

Δύο κύκλοι (Ο,ρ) και (Κ,R) μπορεί:



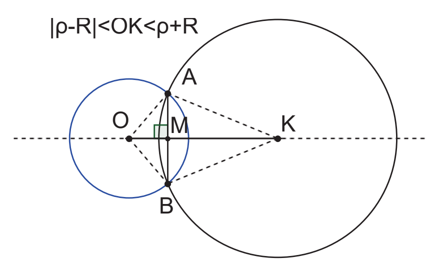
Σχήμα 16

Να μην έχουν κοινά σημεία (**ο ένας είναι εξωτερικός του άλλου**) και τότε η διάκεντρός τους είναι μεγαλύτερη του αθροίσματος των ακτίνων τους. (Σχ.16)



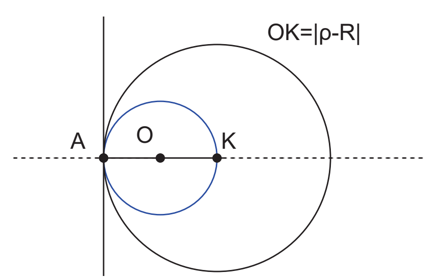
Σχήμα 17

Να **εφάπτονται (εξωτερικά)** και η διάκεντρός τους είναι ίση με το άθροισμα των ακτίνων.
Το σημείο Α λέγεται **σημείο επαφής** των δύο κύκλων. (Σχ.17)



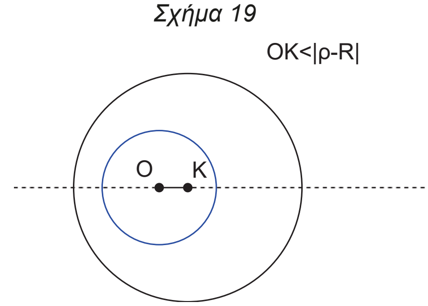
Σχήμα 18

Να **τέμνονται** σε δύο σημεία. Η χορδή ΑΒ λέγεται **κοινή χορδή** των δύο κύκλων. Οπότε, από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΚΑΟ θα ισχύει ότι η διάκεντρος τους είναι μικρότερη του αθροίσματος των δύο ακτίνων και μεγαλύτερη από την απόλυτη τιμή της διαφοράς τους.
Στην περίπτωση αυτή η διάκεντρος είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής των δύο κύκλων. (Σχ.18)



Σχήμα 19

Να **εφάπτονται εσωτερικά**. Τότε η διάκεντρός τους είναι ίση με την απόλυτη τιμή της διαφοράς των ακτίνων των δύο κύκλων. (Σχ.19)



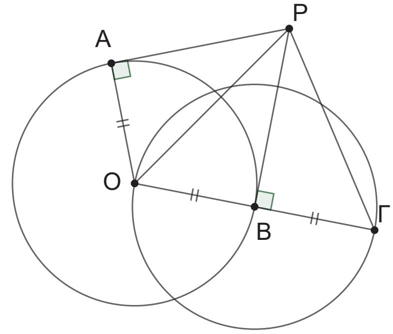
Σχήμα 20

Τέλος, μπορεί να είναι **ο ένας εσωτερικά του άλλου,** όπου η διάκεντρός τους θα είναι μικρότερη από την απόλυτη τιμή της διαφοράς των ακτίνων των δύο κύκλων. (Σχ.20)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. **Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζεται ο κύκλος (Ο, R) και τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ, ΡΒ που άγονται από σημείο Ρ. Αν στην προέκταση της ΟΒ θεωρήσουμε σημείο Γ ώστε ΒΓ = ΟΒ, να αποδείξετε ότι:**

α) $P\Gamma = PO$ **β)** $P\Gamma > PA$ **γ)** $A\hat{P}\Gamma = 3\cdot B\hat{P}\Gamma$



ΛΥΣΗ

Ανακαλούμε τις γνώσεις που έχουμε και που σχετίζονται με τις υποθέσεις της άσκησης.

Θυμόμαστε ότι αν από σημείο Ρ φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ, τότε είναι ΡΑ = ΡΒ. Επίσης, η ΟΡ είναι διχοτόμος των γωνιών $A\hat{P}B$ και $A\hat{O}B$, $OB \perp PB$, $OA \perp PA$ και η ΡΟ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ. Επίσης θυμόμαστε ότι αν σε ένα τρίγωνο το ύψος είναι και διάμεσος, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Χαράσσουμε μία στρατηγική επίλυσης της άσκησης, κάνοντας τους αναγκαίους λογικούς συνδυασμούς.

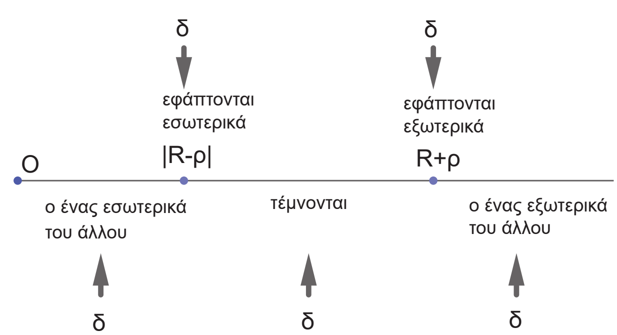
α) Το τρίγωνο ΟΡΓ είναι ισοσκελές αφού η ΡΒ είναι ύψος και διάμεσος, άρα $P\Gamma = PO$.

β) Επειδή $P\Gamma = PO$ αρκεί να δείξουμε ότι $PO > PA$ που ισχύει, διότι στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΡΟ η ΡΟ είναι η μεγαλύτερη πλευρά, αφού είναι υποτείνουσα.

γ) Στο ισοσκελές ΟΡΓ η ΡΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $O\hat{P}\Gamma$, άρα $O\hat{P}B = B\hat{P}\Gamma$ (1). Από το Ρ έχουμε φέρει τα εφαπτόμενα σχήματα, άρα η ΡΟ είναι διχοτόμος της $A\hat{P}B$, οπότε $A\hat{P}O = O\hat{P}B$ (2).
Από (1) και (2) έχουμε τελικά ότι $A\hat{P}O = O\hat{P}B = B\hat{P}\Gamma$, άρα $A\hat{P}\Gamma = 3\cdot B\hat{P}\Gamma$.

2. **Να προσδιορισθούν οι σχετικές θέσεις των κύκλων (Κ, ρ) και (Λ, 2ρ) αν:**

i) $K\Lambda = \frac{\rho}{2}$ **ii)** $K\Lambda = \rho$
iii) $K\Lambda = 2\rho$ **iv)** $K\Lambda = 3\rho$
v) $K\Lambda = 4\rho$



ΛΥΣΗ

Ανακαλούμε τις γνώσεις που έχουμε και σχετίζονται με τις υποθέσεις της άσκησης.

Θυμόμαστε ότι για να βρούμε τη σχετική θέση δύο κύκλων συγκρίνουμε τη διάκεντρο δ με το άθροισμα και τη διαφορά των ακτίνων, όπως χαρακτηριστικά παρουσιάζεται στο παραπάνω διάγραμμα.
Για το παράδειγμά μας έχουμε $R + r = 3\rho$ και $R - r = \rho$, οπότε:

Αν $K\Lambda = \frac{\rho}{2} < \rho = R - r$ ο (K,ρ) είναι εσωτερικά του (Λ, 2ρ).

Αν $K\Lambda = \rho = R - r$ ο (K,ρ) εφάπτεται του $(\Lambda, 2\rho)$ εσωτερικά.

Αν $R - r = \rho < K\Lambda = 2\rho < 3\rho = R + r$ οι δύο κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία.

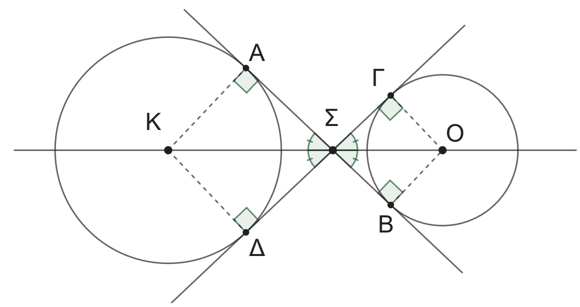
Αν $K\Lambda = 3\rho = R + r$ οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

Αν $K\Lambda = 4\rho > R + r$ δεν έχουν κοινά σημεία και ο ένας είναι εξωτερικά του άλλου.

3. **Θεωρούμε τους κύκλους (Ο, R) και (Κ, ρ) και δύο ευθείες που εφάπτονται και των δύο κύκλων, όπως στο σχήμα (κοινές εσωτερικές εφαπτομένες) τους. Να αποδείξετε ότι:**

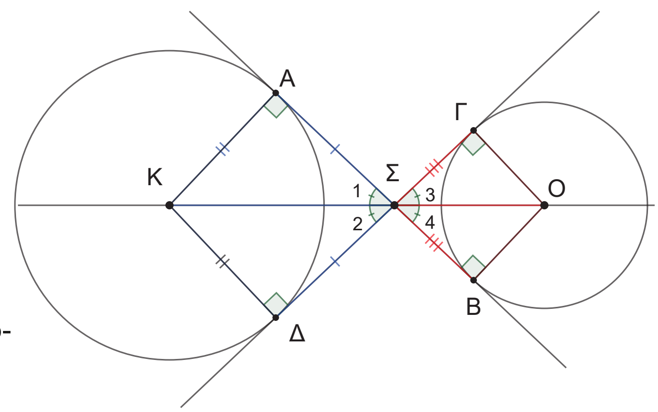
α) ΑΒ = ΔΓ.

β) Κ, Σ, Ο συνευθειακά (δηλαδή βρίσκονται στην ίδια ευθεία).



ΛΥΣΗ

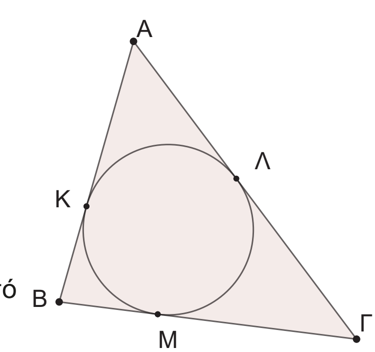
Ανακαλούμε τις γνώσεις που έχουμε και σχετίζονται με τις υποθέσεις της άσκησης. Βρίσκουμε τις «κρυμμένες» ισότητες και τις σημειώνουμε στο σχήμα μας.



α) Ισχύει ότι $ΣΑ = ΣΔ$ και $ΣΒ = ΣΓ$.
Άρα προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:
$ΣΑ + ΣΒ = ΣΔ + ΣΓ$ ή $ΑΒ = ΓΔ$.

β) Ισχύουν: $\hat{Σ}_1 = \hat{Σ}_2$ και $\hat{Σ}_3 = \hat{Σ}_4$.
Επειδή οι γωνίες $Α\hat{Σ}Δ$ και $Γ\hat{Σ}Β$ είναι κατακορυφήν θα είναι ίσες, άρα τελικά είναι $\hat{Σ}_1 = \hat{Σ}_2 = \hat{Σ}_3 = \hat{Σ}_4$.
Για να είναι τα σημεία Κ,Σ,Ο συνευθειακά, αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{Σ}_1 + Α\hat{Σ}Γ + \hat{Σ}_3 = 180^\circ$.
Επειδή όμως $\hat{Σ}_3 = \hat{Σ}_2$, αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{Σ}_1 + Α\hat{Σ}Γ + \hat{Σ}_2 = 180^\circ$, που ισχύει αφού η ΔΓ είναι κοινή εφαπτομένη των δύο κύκλων. Άρα τα σημεία Κ, Σ, Ο συνευθειακά.

Ερωτήσεις κατανόησης



1. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τρίγωνο ΑΒΓ και έναν κύκλο που εφάπτεται και των τριών πλευρών του στα σημεία Κ,Λ και Μ. Αν $ΑΚ = 4$, $ΛΓ = 3$ και $ΒΜ = 2$ με τι ισούται η περίμετρος του τριγώνου;

2. Δικαιολογείστε την αλήθεια της πρότασης: «οι εφαπτόμενες στα άκρα μιας διαμέτρου ενός κύκλου είναι ευθείες παράλληλες».

3. Η ευθεία που διέρχεται από το μέσο μιας χορδής ενός κύκλου και από το μέσο του αντίστοιχου τόξου διέρχεται από το κέντρο του κύκλου;

4. Αν μία ευθεία εφάπτεται ενός κύκλου και είναι παράλληλη μιας χορδής του, τότε το σημείο επαφής είναι το μέσο του αντίστοιχου τόξου;

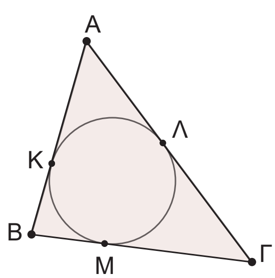
5. Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους;

6. Δίνονται οι κύκλοι $(Κ,ρ)$ και $(Λ,R)$, με $ρ + R = 6$ και $R - ρ = 2$, να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της 1ης στήλης με τα κατάλληλα στοιχεία της 2ης στήλης.

Στήλη 1η	Στήλη 2η
Αν η διάκεντρος ΚΛ είναι ίση με: **Α.** $ΚΛ = 3$ **Β.** $ΚΛ = 2$ **Γ.** $ΚΛ = 7$ **Δ.** $ΚΛ = 6$ **Ε.** $ΚΛ = 1$	Τότε οι δύο κύκλοι: **1.** Τέμνονται. **2.** Εφάπτονται εξωτερικά. **3.** Εφάπτονται εσωτερικά. **4.** Ο ένας είναι εξωτερικά του άλλου και δεν έχουν κοινά σημεία. **5.** Ο ένας είναι εσωτερικά του άλλου και δεν έχουν κοινά σημεία.

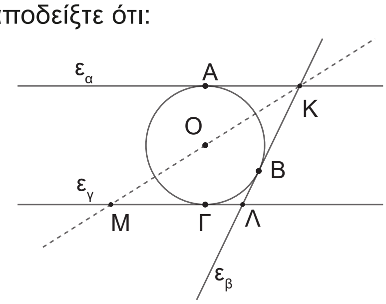
Ασκήσεις

1. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το τρίγωνο ΑΒΓ και έναν κύκλο που εφάπτεται και των τριών πλευρών του στα σημεία Κ, Λ και Μ.
Αν $ΑΒ = 6$, $ΑΓ = 7$ και $ΒΓ = 5$, να υπολογίσετε τα τμήματα ΑΚ, ΒΜ και ΓΛ.



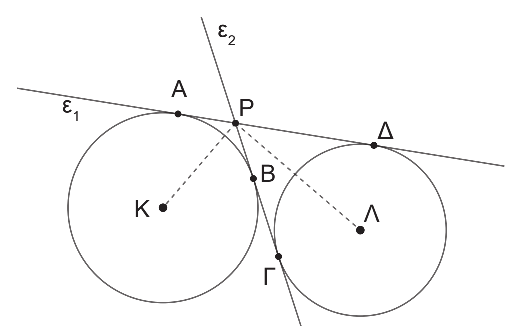
2. Δίνεται κύκλος (Ο,ρ), μία διάμετρός του ΑΒ και οι εφαπτόμενες $ε_1, ε_2$ του κύκλου στα Α, Β αντίστοιχα. Αν μια τρίτη εφαπτομένη ε τέμνει τις $ε_1, ε_2$ στα Γ, Δ, να αποδείξετε ότι:
α) οι εφαπτόμενες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες μεταξύ τους.
β) $ΓΑ + ΔΒ = ΓΔ$, **γ)** $Γ\hat{Ο}Δ = 90°$.

3. Σε κύκλο (Ο,ρ) έχουμε φέρει τις εφαπτόμενες $ε_α$ και $ε_γ$ παράλληλες μεταξύ τους και την εφαπτομένη $ε_β$ σε ένα τυχαίο σημείο Β. Ονομάζουμε Κ και Λ τα σημεία τομής των εφαπτομένων και Μ το σημείο τομής της ΚΟ με την $ε_γ$, να αποδείξτε ότι:



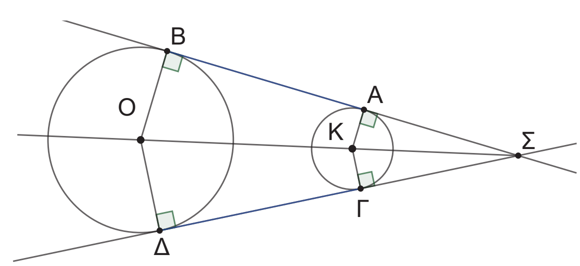
α) Το τρίγωνο ΜΛΚ είναι ισοσκελές,
β) ΜΓ = ΑΚ.

4. Στο σχήμα που ακολουθεί οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι οι κοινές εφαπτόμενες των δύο κύκλων με κέντρα Κ και Λ. Αν Α, Β, Γ και Δ τα αντίστοιχα σημεία επαφής να αποδείξετε ότι:
α) $Κ\hat{Ρ}Λ = 90°$, **β)** $ΡΔ - ΡΑ = ΒΓ$.

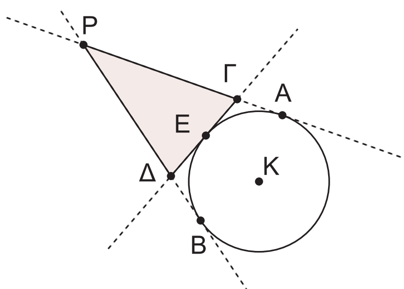


5. Να αποδείξετε ότι αν έχουμε δύο **ομόκεντρους** κύκλους, (κύκλοι με το ίδιο κέντρο) όλες οι χορδές του μεγάλου κύκλου που εφάπτονται του μικρού κύκλου είναι ίσες μεταξύ τους.

6. Θεωρούμε τους κύκλους (Ο, R) και (Κ,ρ) και φέρουμε **τις κοινές εξωτερικές εφαπτομένες** τους (όπως στο σχήμα). Να αποδείξετε ότι:
α) ΑΒ = ΔΓ, **β)** Ο,Κ,Σ συνευθειακά,
γ) ΟΚ διχοτόμος της $Β\hat{Σ}Δ$.



7. Δίνεται κύκλος (K,ρ) και σημείο P εξωτερικό του. Φέρουμε τις εφαπτόμενες PA και PB. Θεωρούμε τυχαίο σημείο Ε του τόξου ΑΒ και φέρουμε την εφαπτομένη που τέμνει τις ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Γ και Δ, όπως στο σχήμα.
Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ είναι σταθερή και δεν εξαρτάται από τη θέση του Ε.



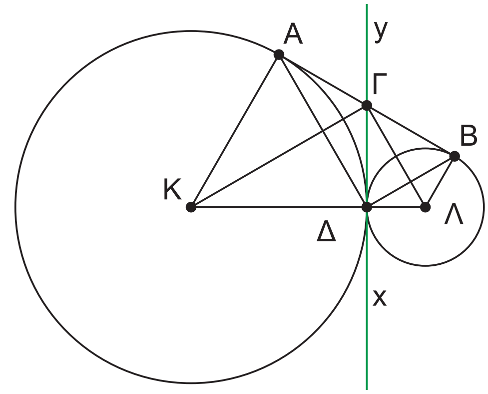
8. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται δύο κύκλοι (K,R) και (Λ,ρ) που εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Δ, **η κοινή εσωτερική εφαπτομένη** τους xy και το κοινό εξωτερικά εφαπτόμενο τμήμα ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία $K\hat{\Gamma}\Lambda$ είναι ορθή.

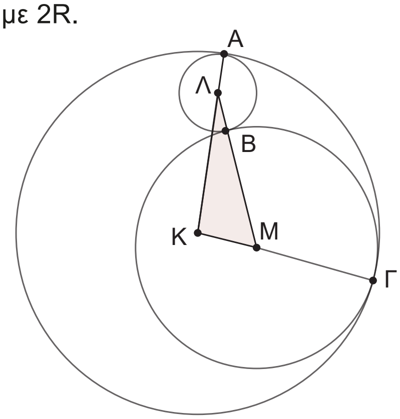
β) Το σημείο Γ είναι το μέσο του ΑΒ.

γ) Ισχύει ότι $K\Gamma + \Gamma\Lambda > AB$.

δ) Ισχύει ότι $\Delta\Gamma < \frac{A\Delta + \Delta B}{2}$.



9. Στο παρακάτω σχήμα οι κύκλοι (Λ,ρ) και (M,r) εφάπτονται εξωτερικά μεταξύ τους και εσωτερικά με ένα τρίτο κύκλο (K,R). Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΚΛΜ είναι ίση με 2R.



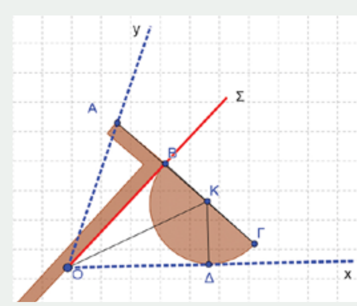
Στιγμές από την ιστορία των Μαθηματικών

Το πρόβλημα της τριχοτόμησης μιας γωνίας

Ένα από τα προβλήματα που αντιμετώπισαν οι αρχαίοι Έλληνες γεωμέτρες ήταν να βρουν τρόπο να τριχοτομούν μία οποιαδήποτε γωνία με βάση τους περιορισμούς της Ευκλείδειας επιταγής ότι μία κατασκευή, πρέπει να γίνεται χρησιμοποιώντας μόνο διαβήτη και κανόνα.

Όλες οι προσπάθειες έπεσαν στο κενό, γιατί, όπως αποδείχθηκε αργότερα, μία τέτοια κατασκευή είναι αδύνατη. Κατασκευάστηκαν όμως Γεωμετρικά όργανα τα οποία με τρόπο «μηχανικό» έλυναν το πρόβλημα.

Ένα από αυτά τα όργανα είναι αυτό που παρουσιάζεται στη διπλανή εικόνα. Το όργανο αυτό αποτελείται από έναν συνδυασμό γνώμονα και μοιρογνωμονίου. Η κατασκευή του γίνεται ώστε ΒΓ = 2ΑΒ δηλαδή η ακτίνα του ημικυκλίου να είναι ίση με την μια πλευρά της ορθής.



Όπως θα παρατηρείτε, το όργανο τοποθετείται έτσι ώστε το ημικύκλιο να εφάπτεται της πλευράς Οx και το άκρο του Α να είναι πάνω στην Οy της γωνίας $x\hat{O}y$.

Εργασία για το σπίτι

Δικαιολογείστε γιατί επιτυγχάνεται με τον τρόπο αυτό η τριχοτόμηση της δεδομένης γωνίας.

Βρείτε ιστορικά στοιχεία σχετικά με τα άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας και ειδικά για την τριχοτόμηση της γωνίας.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

1. Ανισοτικές σχέσεις

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι:

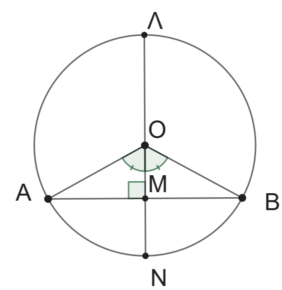
α) Η εξωτερική γωνία είναι μεγαλύτερη από τις απέναντι εσωτερικές.

β) Απέναντι από άνισες γωνίες βρίσκονται όμοια άνισες πλευρές και αντίστροφα, δηλαδή $\hat{B} > \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \beta > \gamma$.

γ) Τριγωνική ανισότητα $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$, $|\gamma - \alpha| < \beta < \alpha + \gamma$, $|\beta - \alpha| < \gamma < \beta + \alpha$.

2. Βασικές γνώσεις για τον κύκλο

α) Κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ λέγεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που απέχουν από το Ο απόσταση ρ.



β) Ένα σημείο Α λέγεται **εσωτερικό** του κύκλου (Ο, ρ) αν και μόνο αν ΟΑ < ρ.

γ) Ένα σημείο Β λέγεται **εξωτερικό** του κύκλου (Ο, ρ) αν και μόνο αν ΟΒ > ρ.

δ) Το κάθετο τμήμα ΟΜ που άγεται από το κέντρο του κύκλου προς μία χορδή του λέγεται **απόστημα της χορδής**.

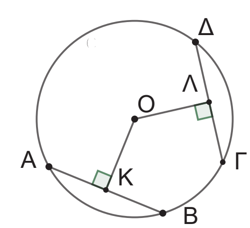
Το σημείο Μ είναι το μέσο του ΑΒ και τα σημεία Ν, Λ μέσα των τόξων $\overset{\frown}{ANB}$ και $\overset{\frown}{A\Lambda B}$ αντίστοιχα.

ε) Σχέση μεταξύ τόξων – χορδών και αποστημάτων

Στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους ισχύει ότι:

- σε ίσα τόξα αντιστοιχούν ίσες χορδές και αντίστροφα,
- σε ίσες χορδές αντιστοιχούν ίσα αποστήματα και αντίστροφα,

δηλαδή $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow OK = O\Lambda$.



στ) Σχετική θέση ευθείας και κύκλου

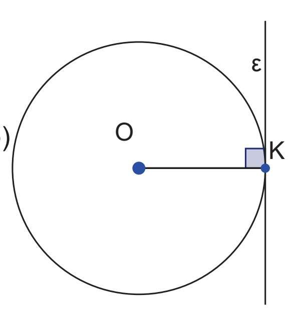
Αν d είναι η απόσταση του κέντρου Ο του κύκλου (Ο, ρ) από την ευθεία (ε) τότε:

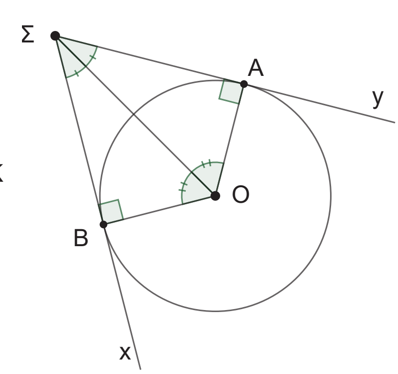
- Αν d > ρ η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κοινά σημεία.
- Αν d = ρ η ευθεία και ο κύκλος έχουν ένα κοινό σημείο. Τότε λέμε ότι η ευθεία **εφάπτεται** του κύκλου.
- Αν d < ρ η ευθεία **τέμνει** τον κύκλο σε δύο σημεία.

ζ) Εφαπτομένη κύκλου

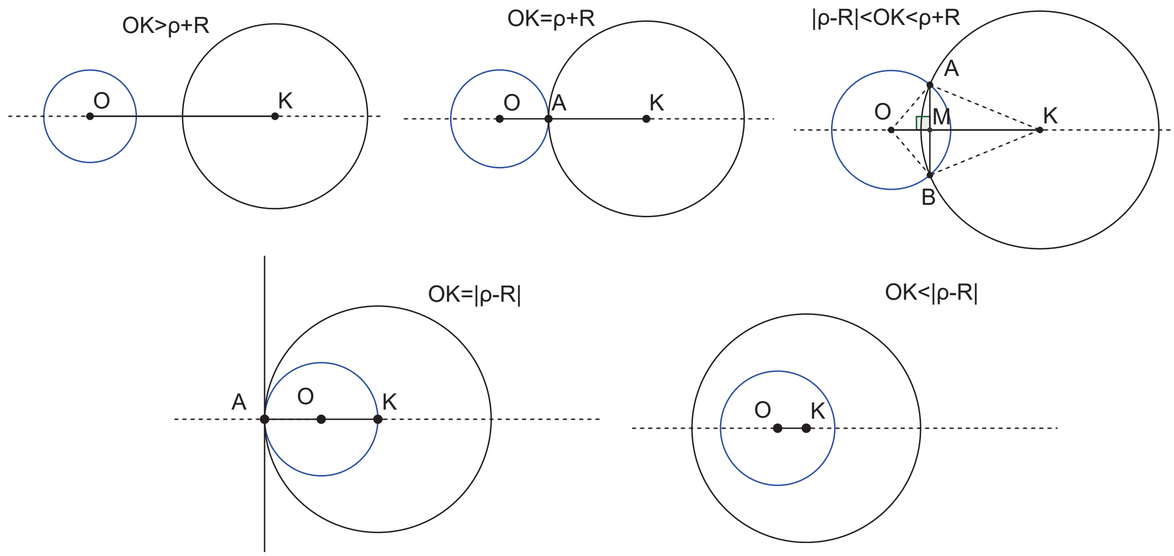
Αν η ε εφάπτεται του (Ο, ρ) σε σημείο του Κ, τότε $OK \perp \varepsilon$.

Αν ΣΑ, ΣΒ εφαπτόμενα τμήματα του (Ο, ρ) που άγονται από το Σ, τότε ΣΑ = ΣΒ και η ΟΣ είναι διχοτόμος των γωνιών $B\hat{\Sigma}A$ και $B\hat{O}A$.





η) Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

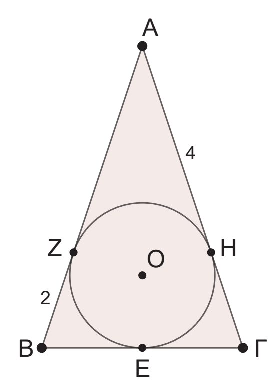


Επαναληπτικο Φυλλο Αξιολογησης

Ερωτήσεις θεωρίας (Μονάδες 3 + 3 + 2 = 8)

1. Έχουμε δύο ξυλάκια μήκους 13 cm και 6 cm και θέλουμε άλλο ένα τρίτο για να φτιάξουμε ένα τρίγωνο. Ποιο μπορεί να είναι το μήκος του; Αν η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου είναι 13 cm, ποιο μπορεί να είναι το μήκος του τρίτου ξύλου; Αν θέλουμε να φτιάξουμε ένα ισοσκελές τρίγωνο, ποιο είναι το μήκος του τρίτου ξύλου;

2. Στο διπλανό σχήμα ο κύκλος εφάπτεται και των τριών πλευρών του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ. Αν ΑΗ = 4 cm και ΒΖ = 2 cm. Πόση είναι η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ;



3. Ποια είναι η σχετική θέση των κύκλων (Ο, 3), (Κ, 4) με ΟΚ = 7;

Άσκηση 1η (Μονάδες 5 + 2 = 7)

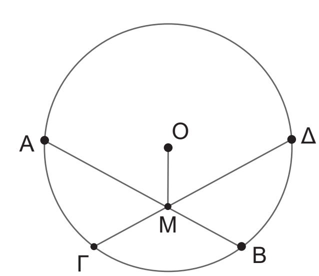
Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Δ στο εσωτερικό του.

Να αποδείξετε ότι ισχύει $\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{\Gamma A}}{2} < \mathrm{\Delta A}+\mathrm{\Delta B}+\mathrm{\Delta\Gamma}$.

Αν στο παραπάνω τρίγωνο είναι ΔΑ = 3 cm, ΔΒ = 2 cm και ΔΓ = 4 cm, μπορεί η περίμετρος του τριγώνου να είναι ίση με 19 cm; Να δικαιολογήσετε τη σκέψη σας.

Άσκηση 2η (Μονάδες 5)

Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζονται δύο ίσες χορδές ΑΒ και ΓΔ του κύκλου (Ο, ρ), που τέμνονται στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι η ΟΜ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{\mathrm{A M \Delta}}$.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Παραλληλόγραμμα

4.1
Παραλληλόγραμμο

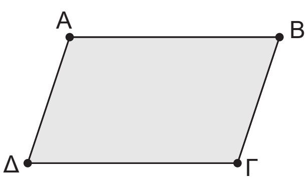
Τι καινούργιο υπάρχει στην ενότητα

Στις παρακάτω σελίδες:

- δίνουμε τον ορισμό του παραλληλογράμμου,
- ανακαλύπτουμε τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου,
- μαθαίνουμε πότε ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

Απαραίτητες γνώσεις. (Σχ.1)

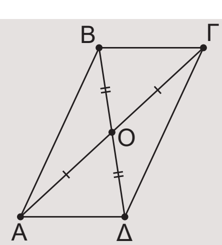
Παραλληλόγραμμο, είναι **το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.**



Σχήμα 1

Δραστηριότητα

Σχεδιάστε ένα παραλληλόγραμμο.
Συγκρίνετε τα κατάλληλα τρίγωνα για να αποδείξετε ότι έχει τις απέναντι γωνίες και πλευρές του ίσες.
Φέρτε τις **διαγωνίους** του παραλληλογράμμου και αποδείξτε ότι το σημείο τομής τους είναι το μέσο τους.
Ή, όπως λέμε, **οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου διχοτομούνται**.



Ας δούμε τι έχει προκύψει

Άρα σε ένα παραλληλόγραμμο:
Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες (και παράλληλες).
Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
Οι διαγώνιοι του διχοτομούνται.
Το σημείο τομής των διαγωνίων το ονομάζουμε **κέντρο του παραλληλογράμμου**.

Δραστηριότητα

Γεωμετρία έξω από την αίθουσα! Ας φανταστούμε ότι είστε με τους συμμαθητές σας στην αυλή του σχολείου. Έχετε ένα μεγάλο κομμάτι σχοινί με τη δυνατότητα να το κόψετε σε όσα κομμάτια θέλετε. Ο στόχος είναι να τοποθετήσετε τέσσερεις συμμαθητές σας σε τέτοιες θέσεις, ώστε να σχηματίζουν παραλληλόγραμμο. Πως μπορεί να γίνει κάτι τέτοιο;

Με την παραπάνω δραστηριότητα γεννιέται το ερώτημα:
Αν έχουμε ένα τετράπλευρο τι πρέπει να ισχύει, ώστε να είναι παραλληλόγραμμο;

Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο παραλληλόγραμμο

Κατ' αρχήν, το προφανές. Όπως λέει ο ορισμός:

1) Αν ένα τετράπλευρο έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, είναι παραλληλόγραμμο.

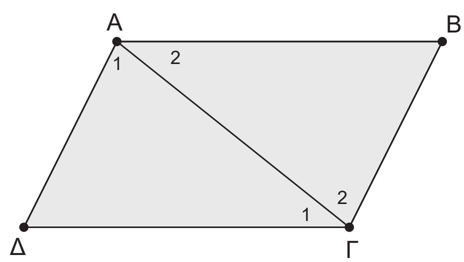
Ποια άλλα κριτήρια μπορούμε να διατυπώσουμε: *Να ισχύει κάποια από τις ιδιότητές του!*
Άρα θα αποδείξουμε ότι:

2) Αν ένα τετράπλευρο έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες είναι παραλληλόγραμμο. (Σχ.2)

Αποδειξη

Πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύει ο ορισμός δηλαδή ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. Πώς δείχνουμε ότι δύο ευθείες είναι παράλληλες; *Πρέπει να φέρουμε μία τέμνουσα και να δείξουμε ότι οι εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζονται από τις ευθείες και την τέμνουσα είναι ίσες.*

Φέρουμε στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ μία διαγώνιό του, π.χ. την ΑΓ.



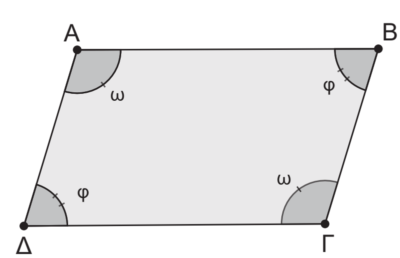
Σχήμα 2

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΑΒΓ, αυτά έχουν την ΑΓ κοινή πλευρά και ΑΒ = ΔΓ και ΑΔ = ΒΓ από υπόθεση. Οπότε, από κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα. Επομένως, θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα ένα προς ένα. Άρα θα είναι $\hat{Α}_1 = \hat{Γ}_2$ (1) και $\hat{Α}_2 = \hat{Γ}_1$ (2). Από την (1) καταλήγουμε στο συμπέρασμα $ΑΔ \parallel ΒΓ$ (αφού δύο εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζονται από τις ΑΔ, ΒΓ και την τέμνουσα ΑΓ είναι ίσες). Όμοια από την (2) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $ΑΒ \parallel ΔΓ$.
Άρα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. ■

3) Αν ένα τετράπλευρο έχει τις απέναντι γωνίες του ίσες, τότε θα είναι παραλληλόγραμμο. (Σχ.3)

Αποδειξη

Ας υποθέσουμε ότι είναι $\hat{Α} = \hat{Γ} = ω$ και $\hat{Β} = \hat{Δ} = φ$.
Πρέπει να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. Στο σημείο αυτό πρέπει να θυμηθούμε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου είναι 360° Οπότε, για το τετράπλευρό μας θα ισχύει $2ω + 2φ = 360^\circ \Leftrightarrow ω + φ = 180^\circ$.
Άρα θα είναι $\hat{Α} + \hat{Δ} = 180^\circ$ από όπου καταλήγουμε στο συμπέρασμα $ΑΒ \parallel ΔΓ$ (1) (διότι οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζονται από τις ΑΒ και ΔΓ, τεμνόμενες από την ΑΔ είναι παραπληρωματικές). Όμοια από την ισότητα $\hat{Α} + \hat{Β} = 180^\circ$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $ΑΔ \parallel ΒΓ$ (2).
Από (1) και (2) έχουμε ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. ■

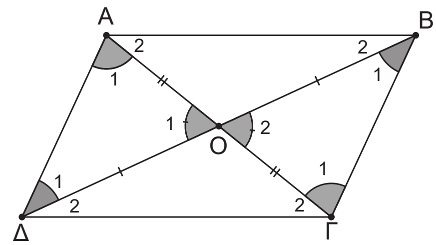


Σχήμα 3

4) Αν σε ένα τετράπλευρο οι διαγώνιοι του διχοτομούνται, τότε είναι παραλληλόγραμμο. (Σχ.4)

Αποδειξη

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΟΔ$ και $ΓΟΒ$.
Αυτά έχουν $ΑΟ = ΟΓ$, $ΟΔ = ΟΒ$ (αφού οι διαγώνιοι διχοτομούνται) και $\widehat{Ο}_1 = \widehat{Ο}_2$ ως κατάκορυφήν γωνίες.
Άρα από κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα θα έχουν και όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα ένα προς ένα.
Άρα θα είναι και $\widehat{Α}_1 = \widehat{Γ}_1$. Οπότε, $ΑΔ \parallel ΒΓ$ αφού δύο εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζονται από τις ΑΔ και ΒΓ τεμνόμενες από την ΑΓ είναι ίσες. Όμοια, από τα ίσα τρίγωνα ΑΟΒ και ΔΟΓ θα καταλήξουμε στο ότι $ΑΒ \parallel ΔΓ$, άρα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. ■

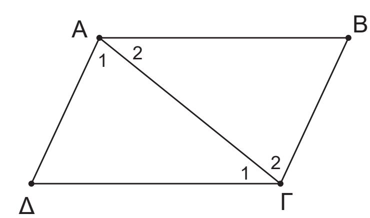


Σχήμα 4

5) Αν ένα τετράπλευρο έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, τότε είναι παραλληλόγραμμο. (Σχ.5)

Αποδειξη

Πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύει ο ορισμός, δηλαδή ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.
Οπότε, αν $ΑΒ \parallel ΔΓ$ και ΑΒ = ΔΓ μένει να δείξουμε ότι είναι και $ΑΔ \parallel ΒΓ$. Φέρουμε την ΑΓ και συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ.
Αυτά έχουν την ΑΓ κοινή πλευρά και $ΑΒ = ΔΓ$ και $\widehat{Α}_2 = \widehat{Γ}_1$.
Επομένως, από κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα. Άρα, θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα ένα προς ένα.

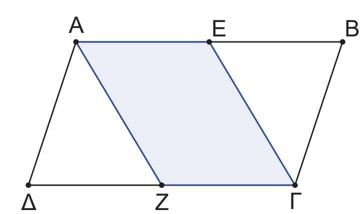


Σχήμα 5

Συνεπώς, θα είναι $\widehat{Α}_1 = \widehat{Γ}_2$. Οπότε, οι εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζονται από τις ΑΔ και ΒΓ τεμνόμενες από την ΑΓ είναι ίσες, άρα $ΑΔ \parallel ΒΓ$. Άρα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. ■

Παραδειγματα

1. Έστω Ε και Ζ, τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι:
- **α) το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο,**
- **β) οι ΑΓ, ΒΔ και ΕΖ διέρχονται από το ίδιο σημείο (συντρέχουν).**

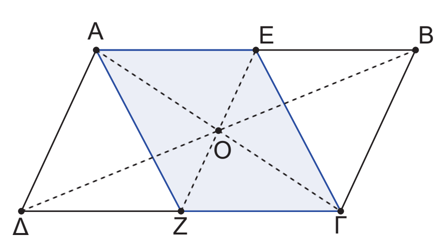


Λυση

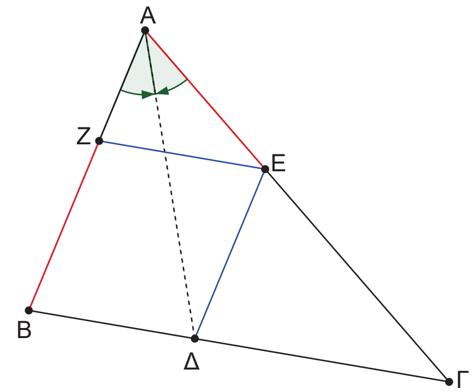
Για να δείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο, αρκεί να εφαρμόσουμε ένα από τα πέντε κριτήρια που έχουμε μάθει.

α) Από τα δεδομένα της άσκησης εύκολα διαπιστώνουμε ότι στο ΑΕΓΖ έχουμε ΑΕ = ΖΓ (ως μισά των ίσων πλευρών ΑΒ = ΔΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ) και $ΑΕ \parallel ΖΓ$, αφού $ΑΒ \parallel ΔΓ$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΔΓ. Άρα το ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, διότι έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες.

β) Γνωρίζουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΔ και ΑΓ διχοτομούνται στο μέσον τους ως διαγώνιοι του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Επίσης, ως διαγώνιοι του παραλληλογράμμου ΑΕΓΖ διχοτομούνται στο μέσο τους και οι ΑΓ και ΖΕ. Επειδή όμως το μέσο ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι μοναδικό και Ο μέσο της ΑΓ, οι διαγώνιοι ΑΓ, ΕΖ, ΒΔ διχοτομούνται στο Ο. Άρα συντρέχουν στο Ο.



2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ε. Αν η παράλληλη από το Ε προς την ΒΓ τέμνει την ΑΒ στο Ζ, να αποδείξετε ΑΕ = ΒΖ.

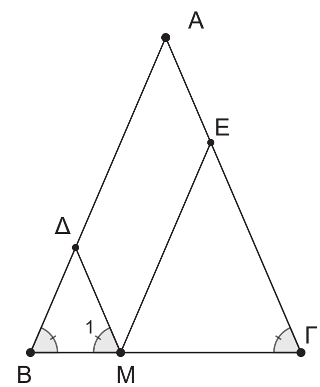


ΛΥΣΗ

Από τη στιγμή που έχουμε φέρει πολλές παράλληλες δύο πράγματα μπορεί να συμβαίνουν. Να σχηματίζονται παραλληλόγραμμα και να υπάρχουν ίσες γωνίες ως εντός εναλλάξ κλπ.

Το ΒΖΕΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Γιατί;) Άρα ΒΖ = ΔΕ (1).
Οπότε, πρέπει να δείξουμε ότι ΔΕ = ΑΕ ή ότι το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.
Είναι όμως $B\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}\Gamma$ λόγω της διχοτόμου (2) και $B\hat{A}\Delta = A\hat{\Delta}E$ (3) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB \parallel \Delta E$ που τέμνονται από την ΑΔ, οπότε από (2) και (3) έχουμε $\Delta\hat{A}\Gamma = A\hat{\Delta}E$.
Άρα θα είναι ΑΕ = ΔΕ (4). Τέλος, από (1) και (4) έχουμε ότι ΑΕ = ΒΖ.

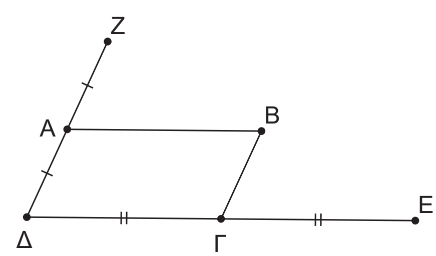
3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και σημείο Μ της βάσης του ΒΓ. Φέρουμε $ME \parallel AB$ (Ε σημείο του ΑΓ) και $M\Delta \parallel A\Gamma$ (Δ σημείο του ΑΒ). Να αποδείξετε ότι $M\Delta + ME = AB$.



ΛΥΣΗ

Αμέσως διαπιστώνουμε ότι το ΑΔΜΕ είναι παραλληλόγραμμο, διότι έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.
Άρα $M\Delta = AE$ και $ME = A\Delta$.
Στο σημείο αυτό ας προσέξουμε ότι θέλουμε να δείξουμε:
$M\Delta + ME = AB$ και έχουμε ήδη βρει $ME = A\Delta$.
Παρατηρώντας το σχήμα θα καταλήξουμε πως αρκεί να δείξουμε ότι $B\Delta = \Delta M$ ή ότι το τρίγωνο ΒΔΜ είναι ισοσκελές. Το οποίο ισχύει, καθώς $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και $\hat{\Gamma} = \hat{M}_1$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζονται από τις παράλληλες $\Delta M \parallel A\Gamma$ και την τέμνουσα ΒΓ. Άρα $\hat{B} = \hat{M}_1$, οπότε το τρίγωνο ΒΔΜ είναι ισοσκελές.

4. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε τη ΔΓ κατά τμήμα ΓΕ = ΔΓ και τη ΔΑ κατά τμήμα ΑΖ = ΔΑ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ζ, Β και Ε βρίσκονται στην ίδια ευθεία (δηλαδή είναι συνευθειακά).

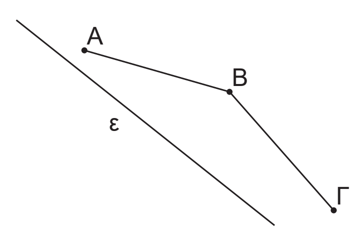


ΛΥΣΗ

Για να δείξουμε ότι τρία σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

1ος τρόπος: $A\hat{B}\Gamma = 180^\circ$

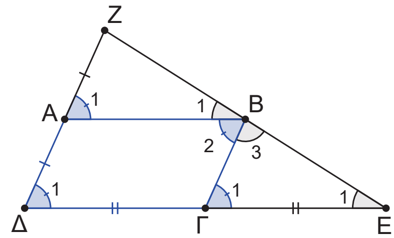
2ος τρόπος: υπάρχει ευθεία ε, ώστε $BA \parallel \varepsilon$ και $B\Gamma \parallel \varepsilon$, οπότε επειδή $BA \parallel B\Gamma$ και Β κοινό σημείο, τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.



Θα προσπαθήσουμε να λύσουμε την άσκηση και με τους δύο τρόπους.

1ος τρόπος

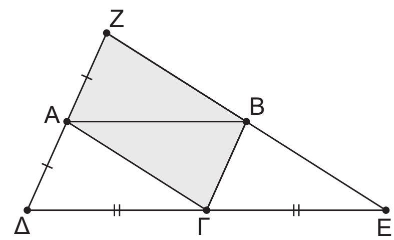
Θα δείξουμε ότι $Z\hat{B}E = 180^\circ$ δηλαδή $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{B}_3 = 180^\circ$
Για το σκοπό αυτό αρχίζουμε να συγκρίνουμε τις γωνίες.
Παρατηρείστε ότι $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1 = \hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_1$ (1) (Γιατί;)
Επίσης, τα τρίγωνα ΖΑΒ και ΒΓΕ είναι ίσα, διότι έχουν $ZA = A\Delta = B\Gamma$ (Γιατί;), όμοια $AB = \Delta\Gamma = \Gamma E$ (Γιατί;) και $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$ από (1), άρα από κριτήριο (ΠΓΠ) θα είναι ίσα, οπότε θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα ένα προς ένα. Δηλαδή $\hat{B}_1 = \hat{E}_1$.



Οπότε, τελικά έχουμε $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{B}_3 = \hat{E}_1 + \hat{\Gamma}_1 + \hat{B}_3 = 180^\circ$.
(Ως άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΒΓΕ). Άρα τα σημεία Ζ, Β, Ε είναι συνευθειακά.

2ος τρόπος

Παρατηρούμε ότι σχηματίζονται παραλληλόγραμμα!
Το ΖΑΓΒ (έχει $ZA \parallel = B\Gamma$ γιατί;) άρα $ZB \parallel A\Gamma$ (1).
Το ΑΒΕΓ (έχει $AB \parallel = \Gamma E$ γιατί;) άρα $BE \parallel A\Gamma$ (2).
Από (1) και (2) έχουμε ότι $BZ \parallel BE$ και επειδή Β κοινό σημείο τα σημεία Ζ, Β, Ε είναι συνευθειακά.



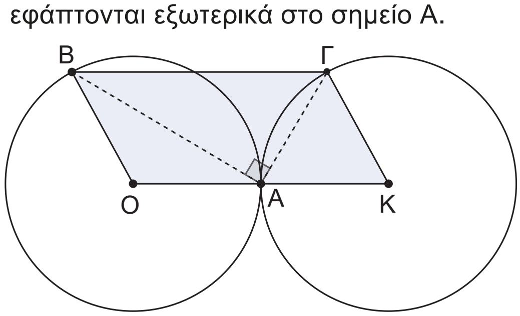
Ασκήσεις και Προβλήματα

1. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε, Ζ, Η, Κ των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΑΔ αντίστοιχα, ώστε $AE = \Gamma H$ και $BZ = \Delta K$.
Να αποδείξτε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΕΖΗΚ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Οι ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ και ΚΖ συντρέχουν.

2. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ($\hat{B} < 90^\circ$) και Ε σημείο της ΑΓ. Φέρουμε $\Delta Z \parallel BE$ (Ζ σημείο της ΑΓ). Να αποδείξετε ότι $\Delta E \parallel BZ$.

3. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τις διαμέσους ΑΜ, ΒΛ και στις προεκτάσεις τους παίρνουμε τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, έτσι ώστε ΜΔ = ΜΑ και ΕΛ = ΒΛ. Να αποδείξετε ότι:
α) ΓΕ = ΓΔ.
β) Τα σημεία Γ, Δ και Ε είναι συνευθειακά.

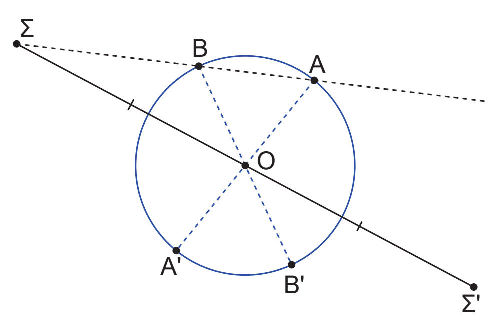
4. Δίνονται οι ίσοι κύκλοι (Ο, ρ) και (Κ, ρ) που εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α.



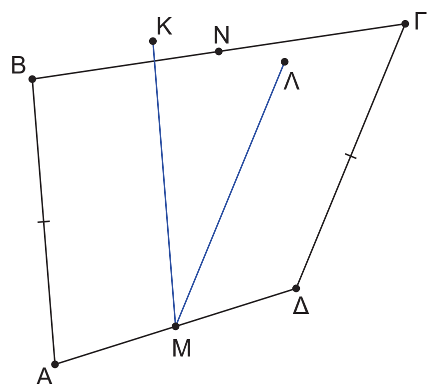
Αν Β και Γ σημεία των δύο κύκλων ώστε $B\hat{A}\Gamma = 90^\circ$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΟΚΓ είναι παραλληλόγραμμο.

5. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ (ΑΔ<ΑΒ) κατά τμήμα ΒΕ = ΒΓ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΔΑ προς το Α και θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΔΖ=ΔΓ. Να αποδείξετε ότι $Z\hat{\Gamma}E = 90^\circ$.

6. Από σημείο Σ εκτός κύκλου (Ο,ρ) φέρουμε μία ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Α και Β. Ονομάζουμε Α' και Β' τα **αντιδιαμετρικά** σημεία των Α και Β και Σ' το συμμετρικό σημείο του Σ ως προς το σημείο Ο, (δηλαδή σημείο τέτοιο ώστε $\Sigma O = O\Sigma'$). Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α',Β' και Σ' είναι **συνευθειακά**.



7. Στο παρακάτω τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι: $AB = \Gamma\Delta$ και Μ, Ν τα μέσα των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Από το Μ κατασκευάζουμε τα ευθύγραμμα τμήματα, ΜΚ παράλληλο και ίσο με το ΑΒ καθώς και το ΜΛ παράλληλο και ίσο με το ΔΓ. Να αποδείξετε ότι:



α) Το ΒΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο.

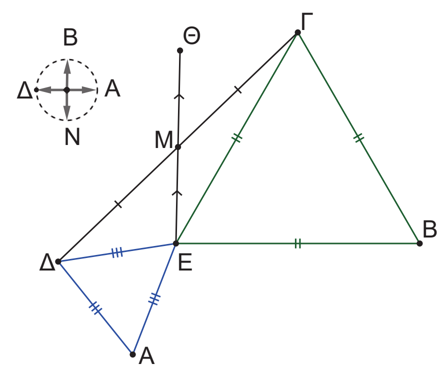
β) Τα σημεία Κ,Ν,Λ είναι συνευθειακά.

γ) Η ΜΝ είναι κάθετη της ΚΛ.

δ) ισχύει ότι $N\hat{\Lambda}M = 180^\circ - \dfrac{\hat{A} + \hat{\Delta}}{2}$.

8. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $B\Gamma = 2AB$. Αν Μ μέσο του ΒΓ και Ε μέσο του ΒΜ, να αποδείξετε ότι η ΑΜ διχοτομεί την γωνία $E\hat{A}\Gamma$.
Υπόδειξη:
Προεκτείνετε την ΑΕ κατά τμήμα $E\Delta = AE$.

9. Στα παλιά τα χρόνια κάποιος είχε κρύψει έναν θησαυρό φτιάχνοντας τον παρακάτω χάρτη. Στις θέσεις Α, Β, Γ και Δ αντιστοιχούν αιωνόβια κυπαρίσσια και στη θέση Ε μία ελιά. Παρατηρείστε ότι τα τρίγωνα που σχηματίζονται ΓΕΒ και ΔΑΕ είναι ισόπλευρα. Τον θησαυρό τον έθαψε στη θέση Θ που είναι τέτοια, ώστε ΕΜ = ΜΘ με Μ το μέσο του τμήματος ΔΓ. Μετά εξαφανίστηκε από προσώπου γης. Ο χάρτης ξέμεινε και ένας αγώνας μεταξύ των επίδοξων κυνηγών θησαυρών ξεκίνησε. Όμως, για κακή τους τύχη το τοπίο είχε αλλάξει από εκείνα τα χρόνια, πολλά δένδρα είχαν κοπεί, μόνο τα κυπαρίσσια στις θέσεις Α και Β υπήρχαν ακόμα, ο θησαυρός φαίνεται ότι για πάντα έχει χαθεί. Ή μήπως όχι;

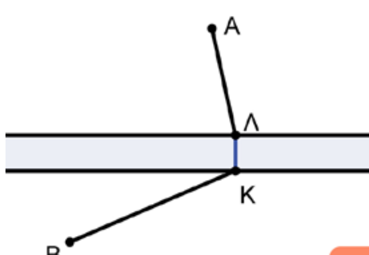


Εργασία για το σπίτι

Πρόβλημα **βέλτιστης διαδρομής**!

Στις δύο όχθες ενός ποταμού με σταθερό πλάτος βρίσκονται οι πόλεις Α και Β.

α) Σε ποιο σημείο πρέπει να κατασκευάσουμε γέφυρα ΛΚ (η οποία θα συνδέει τις δύο όχθες κάθετα), ώστε να ισχύει ΑΛ = ΚΒ;



Για να λύσουμε το πρόβλημα θα πρέπει να θυμηθούμε ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει των άκρων του τμήματος.
Βέβαια, εδώ το πλάτος του ποταμού μας χαλάει.
Αν δεν υπήρχε;
Αν σχεδιάσετε το διπλανό σχήμα σε χαρτί είναι εύκολο να συνεχίσετε:
Διπλώστε το χαρτί, έτσι ώστε η μία όχθη να πέσει πάνω στην άλλη και σκεφθείτε.

β) Σε ποιο σημείο πρέπει να κατασκευάσουμε γέφυρα ΛΚ (η οποία θα συνδέει τις δύο όχθες κάθετα), ώστε το συνολικό μήκος ΑΛ + ΛΚ + ΚΒ να είναι το ελάχιστο δυνατό;

Τα αρχεία GeoGebra θα βοηθήσουν.

4.2
Είδη παραλληλογράμμων

Τι καινούργιο υπάρχει στην ενότητα

Στις παρακάτω σελίδες:
- ορίζουμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο,
- ανακαλύπτουμε τις ιδιότητες του ορθογώνιου παραλληλογράμμου,
- μαθαίνουμε να αναγνωρίζουμε πότε ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο,
- ορίζουμε πότε ένα τετράπλευρο λέγεται ρόμβος,
- ανακαλύπτουμε τις ιδιότητες του ρόμβου,
- μαθαίνουμε να αναγνωρίζουμε πότε ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος,
- ορίζουμε πότε ένα τετράπλευρο λέγεται τετράγωνο,
- ανακαλύπτουμε τις ιδιότητες του τετραγώνου και
- μαθαίνουμε να αναγνωρίζουμε πότε ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο.

Α. Ας μιλήσουμε τώρα για το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

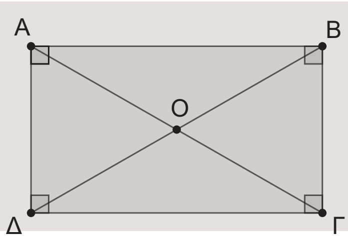
Απαραίτητες γνώσεις

Όπως λέει και το όνομά του, πρόκειται για ένα παραλληλόγραμμο με ορθές γωνίες, οπότε:

Ως ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ορίζουμε το παραλληλόγραμμο που έχει μία γωνία ορθή.

Δραστηριότητα

Ανοίξτε την εφαρμογή GeoGebra.
Δώστε τις κατάλληλες τιμές στους δρομείς, ώστε να σχεδιαστεί ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
Τι παρατηρείτε σε σχέση με τις γωνίες και τις διαγώνιές του;
Δικαιολογήστε την εικασία σας.



Ας δούμε τι έχει προκύψει

Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο θα έχει όλες τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου και επιπλέον όλες οι γωνίες του θα είναι ορθές και οι διαγώνιοί του θα είναι ίσοι.

Δραστηριότητα

Γεωμετρία έξω από την αίθουσα!
Ας φανταστούμε ότι είστε με τους συμμαθητές σας στην αυλή του σχολείου. Έχετε ένα μεγάλο κομμάτι σχοινί με την δυνατότητα να το κόψετε σε όσα κομμάτια θέλετε. Ο στόχος είναι να τοποθετήσετε τέσσερεις συμμαθητές σας σε τέτοιες θέσεις, ώστε να σχηματίζουν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Πως μπορεί να γίνει κάτι τέτοιο;

Με την παραπάνω δραστηριότητα γεννιέται το ερώτημα:
Τι πρέπει να δείξουμε, όταν θέλουμε να δικαιολογήσουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο;

Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

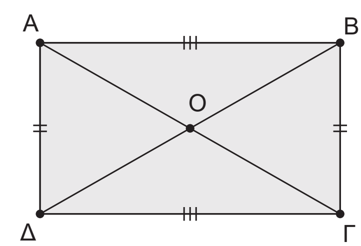
Κατ' αρχήν, πρέπει να δείξουμε ότι είναι παραλληλόγραμμο και μετά ή ότι μία γωνία του είναι ορθή (ορισμός) ή ότι οι διαγώνιοι του είναι ίσοι.

Ας αποδείξουμε ότι:

1. Ένα παραλληλόγραμμο, που οι διαγώνιοι του είναι ίσοι, είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Σχ.6)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να δείξουμε ότι έχει μία γωνία ορθή.
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΔΒ$ και $ΑΔΓ$, αυτά έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία ($ΔΒ = ΑΓ$ από υπόθεση, $ΑΒ = ΔΓ$ ως απέναντι πλευρές παραλληλόγραμμου και $ΑΔ$ κοινή). Οπότε, θα έχουν και όλα τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα ένα προς ένα, άρα $\hat{Α} = \hat{Δ}$ (1).
Όμως, ισχύει και $\hat{Α} + \hat{Δ} = 180^\circ$ (2) ως εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζονται από τις παράλληλες $ΑΒ \parallel ΔΓ$ και την τέμνουσα $ΑΔ$.
Από (1) και (2) έχουμε ότι $\hat{Α} = \hat{Δ} = 90^\circ$, άρα το $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. ■



Σχήμα 6

2. Επίσης, ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο αν :
i. Έχει τρεις γωνίες ορθές. ii. Όλες του οι γωνίες είναι ίσες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i. Αν έχει τρείς γωνίες ορθές θα είναι και η τέταρτη ορθή, αφού το άθροισμα των γωνιών ενός τετράπλευρου είναι 360°. Οπότε, το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο (έχει τις απέναντι γωνίες του ίσες) και έχει μία γωνία ορθή. Άρα είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

ii. Αν όλες οι γωνίες του είναι ίσες, τότε σε συνδυασμό με το ότι το άθροισμα των γωνιών του είναι 360°, καταλήγουμε ότι όλες οι γωνίες του είναι ορθές. Άρα είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. ■

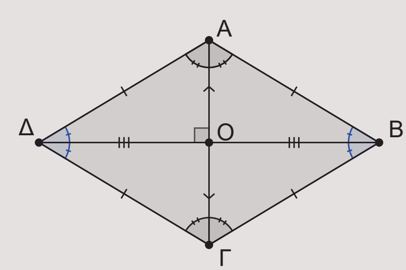
Β. Ένα άλλο είδος παραλληλογράμμου είναι ο ρόμβος.

Απαραίτητες γνώσεις

Ρόμβο ορίζουμε το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες.

Δραστηριότητα GeoGebra.

Δώστε τις κατάλληλες τιμές στους δρομείς, ώστε να σχεδιαστεί ένας ρόμβος. Τι παρατηρείτε σε σχέση με τις πλευρές και τις διαγώνιές του.
Δικαιολογήστε την εικασία σας.



Ας δούμε τι έχει προκύψει

Ο ρόμβος έχει όλες τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου και λόγω του ορισμού του έχει επιπλέον όλες τις πλευρές του ίσες, τις διαγώνιους του να τέμνονται κάθετα και να διχοτομούν τις γωνίες του.

Ας ασχοληθούμε με το αντίστροφο.

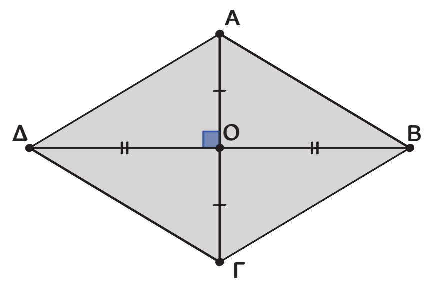
Τι πρέπει να δείξουμε, όταν θέλουμε να συμπεραίνουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος;

Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ρόμβος.

Κατ' αρχήν, πρέπει να δείξουμε ότι είναι παραλληλόγραμμο και μετά ή ότι έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες (ορισμός) ή ότι οι διαγώνιοι του τέμνονται κάθετα ή ότι μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.

Ας αποδείξουμε ότι:

1. Ένα παραλληλόγραμμο που οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα είναι ρόμβος. (Σχ.7)

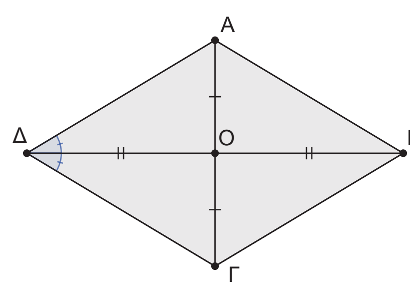


Σχήμα 7

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, αφού η ΒΟ είναι ύψος και διάμεσος.
Άρα ΑΒ = ΒΓ.
Οπότε, το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, άρα είναι ρόμβος. ■

2. Ένα παραλληλόγραμμο που μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του είναι ρόμβος. (Σχ.8)



Σχήμα 8

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, αφού η ΒΟ είναι διχοτόμος και διάμεσος. Άρα ΑΒ = ΒΓ.
Οπότε, το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, άρα είναι ρόμβος. ■

3. Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, αν έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

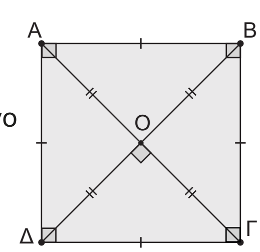
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή έχει όλες τις πλευρές του ίσες είναι παραλληλόγραμμο (έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες). Έχει και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, άρα είναι ρόμβος. ■

Γ. Τέλος, σειρά έχει το γνωστό μας τετράγωνο. (Σχ.9)

Απαραίτητες γνώσεις

Ως τετράγωνο ορίζουμε το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος.



Σχήμα 9

Οπότε, θα έχει και όλες τις ιδιότητες των σχημάτων αυτών, δηλαδή ένα τετράγωνο έχει:

Τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και όλες του τις πλευρές ίσες. Όλες του οι γωνίες είναι ορθές. Οι διαγώνιοι διχοτομούνται, είναι ίσοι, τέμνονται κάθετα και διχοτομούν τις γωνίες του.

Δραστηριότητα

Ανοίξτε την εφαρμογή GeoGebra.
Δώστε τις κατάλληλες τιμές στους δρομείς, ώστε να σχεδιαστεί ένα τετράγωνο.
Επιβεβαιώστε όλες τις παραπάνω ιδιότητες.

Ας ασχοληθούμε με την ερώτηση.

Τι πρέπει να δείξουμε, ώστε ένα τετράπλευρο να είναι τετράγωνο;

Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο τετράγωνο.

Προφανώς από τον ορισμό θα πρέπει να δείξουμε ότι είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ρόμβος.

Δραστηριότητα κατανόησης

Ανοίξτε την εφαρμογή GeoGebra.
Συστηματοποιήστε τις ομοιότητες και τις διαφορές που υπάρχουν ανάμεσα στα διάφορα είδη των παραλληλογράμμων.

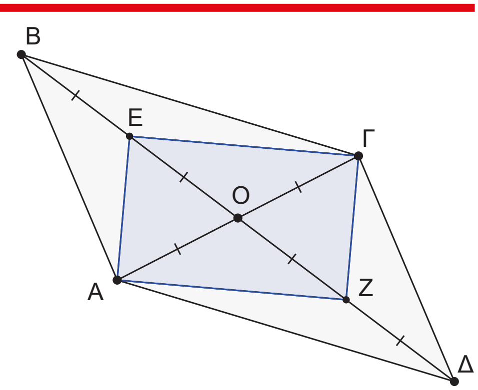
Ένας γεωμετρικός τόπος με ονοματεπώνυμο

Ας φανταστούμε έναν ευθύ δρόμο με τα δύο πεζοδρόμια να σχηματίζουν δύο παράλληλες λωρίδες. Κινούμαστε στον δρόμο αυτό με τέτοιο τρόπο, ώστε σε κάθε χρονική στιγμή να απέχουμε το ίδιο από τα δύο πεζοδρόμια. Ποια είναι η γραμμή που σχηματίζουν οι διαδοχικές θέσεις μας; Προφανώς η γραμμή θα είναι μία ευθεία παράλληλη των δύο πεζοδρομίων ακριβώς στη μέση της απόστασής τους.

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν δύο παράλληλων ευθειών λέγεται **μεσοπαράλληλος** των ευθειών αυτών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. **Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και ΒΔ = 2ΑΓ. Αν Ε και Ζ τα μέσα των ΟΒ και ΟΔ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι το ΑΕΓΖ είναι ορθογώνιο.**



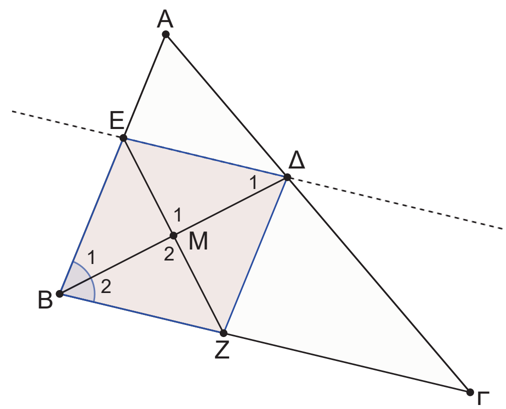
ΛΥΣΗ

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ένα καλό σχήμα βοηθά πάντα. Οπότε, αν σε αυτό σημειώνουμε και τα δεδομένα της άσκησης και γνωρίζουμε τη θεωρία, η στρατηγική επίλυσης της άσκησης είναι εύκολη υπόθεση.

Από θεωρία γνωρίζουμε ότι στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ οι διαγώνιοι διχοτομούνται άρα ΟΒ = ΟΔ και ΟΑ = ΟΓ. Επίσης, γνωρίζουμε πως για να δείξουμε ότι το ΑΕΓΖ είναι ορθογώνιο, πρέπει να δείξουμε ότι είναι παραλληλόγραμμο και ότι έχει τις διαγώνιους του ίσες. Συνδυάζοντας τη θεωρία με τα δεδομένα της άσκησης καταλήγουμε στις ισότητες ΒΕ = ΕΟ = ΟΖ = ΖΔ = ΑΟ = ΟΓ.

Άρα το ΕΓΖΑ είναι παραλληλόγραμμο, διότι οι διαγώνιοί του διχοτομούνται (ΟΕ = ΟΖ και ΟΓ = ΟΑ) και ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, διότι οι διαγώνιοι του είναι ίσοι, αφού ΕΖ = ΑΓ.

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του ΒΔ και Μ το μέσο της ΒΔ. Από το Δ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ε. Αν η ΕΜ τέμνει τη ΒΓ στο Ζ να αποδείξετε ότι το ΔΕΒΖ είναι ρόμβος.



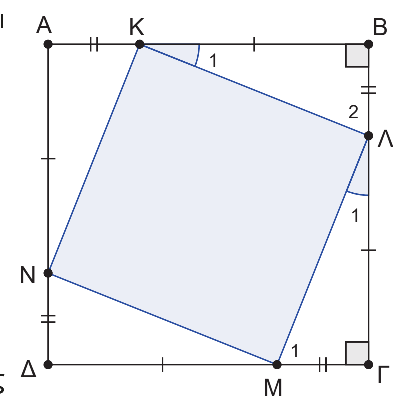
ΛΥΣΗ

Για να δείξουμε ότι το ΕΔΖΒ είναι ρόμβος πρέπει να δείξουμε ένα από τα γνωστά κριτήρια.

Επειδή ήδη έχουμε $ΕΔ \parallel ΒΖ$ αν μπορέσουμε να δείξουμε ότι είναι και ΕΔ = ΒΖ τότε θα έχουμε δείξει ότι το ΕΔΖΒ είναι παραλληλόγραμμο.
Ας εκμεταλλευθούμε το γεγονός ότι το Μ είναι μέσο του ΒΔ και ας συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΕΔΜ και ΖΒΜ. Αυτά έχουν $ΔΜ = ΒΜ$ (Μ μέσο του ΒΔ), $\hat{Μ}_1 = \hat{Μ}_2$ (ως κατακορυφήν) και $\hat{Δ}_1 = \hat{Β}_2$ (ως εντός εναλλάξ γωνίες των $ΕΔ \parallel ΒΖ$ που τέμνονται από την ΒΔ). Επομένως, από κριτήριο (Γ-Π-Γ) είναι ίσα, συνέπως θα έχουν και όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα ένα προς ένα, άρα $ΕΔ = ΒΖ$.
Οπότε, το ΕΔΖΒ έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή η διαγώνιος ΒΔ διχοτομεί την γωνία $\hat{Β}$, το ΕΔΖΒ είναι ρόμβος.

3. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ του τετραγώνου ΑΒΓΔ θεωρούμε τα σημεία Κ, Λ, Μ και Ν αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΑΚ = ΒΛ = ΓΜ = ΔΝ. Να αποδείξετε ότι το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο.

ΛΥΣΗ



Επειδή το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο και $ΑΚ = ΒΛ = ΓΜ = ΔΝ$, θα είναι και $ΚΒ = ΛΓ = ΜΔ = ΝΑ$.
Τα σχηματιζόμενα ορθογώνια τρίγωνα ΑΚΝ, ΒΛΚ, ΓΜΛ και ΔΜΝ είναι εύκολο να δείξουμε ότι είναι ίσα (είναι ορθογώνια και έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες). Άρα θα είναι και $ΚΝ = ΝΜ = ΜΛ = ΛΚ$.
Οπότε το ΚΛΜΝ είναι σίγουρα ρόμβος. Μένει να δείξουμε ή ότι έχει μία γωνία ορθή ή ότι οι διαγώνιοί του είναι ίσοι.
Παρατηρείστε για παράδειγμα την γωνία $Μ\hat{Λ}Κ$ πως συνδέεται με τις γωνίες των τριγώνων που έχουμε δείξει ότι είναι ίσα.
Έχουμε διαδοχικά $Μ\hat{Λ}Κ = 180^\circ - \hat{Λ}_1 - \hat{Λ}_2$, αλλά $\hat{Λ}_1 = \hat{Κ}_1$ ως αντίστοιχες γωνίες των ίσων τριγώνων ΚΒΛ και ΛΓΜ.
Οπότε $Μ\hat{Λ}Κ = 180^\circ - \hat{Κ}_1 - \hat{Λ}_2$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΒΛ είναι $180^\circ - \hat{Κ}_1 - \hat{Λ}_2 = \hat{Β} = 90^\circ$, άρα $Μ\hat{Λ}Κ = 90^\circ$.
Άρα το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο.

Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους

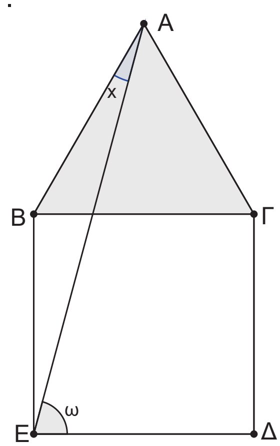
Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι Σωστές και ποιες Λάθος. Να δικαιολογείτε την απάντησή σας.

1. Ένα τετράπλευρο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες είναι τετράγωνο.
2. Το παραλληλόγραμμο, στο οποίο οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα, είναι ρόμβος.
3. Αν ένα παραλληλόγραμμο έχει τις διαγώνιούς του ίσες και κάθετες, τότε είναι τετράγωνο.
4. Αν ένα τετράπλευρο έχει μία γωνία ορθή και τις διαγώνιους να τέμνονται κάθετα, τότε είναι τετράγωνο.
5. Ένα τετράπλευρο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες είναι ρόμβος.

6. Ένα παραλληλόγραμμο που έχει δύο απέναντι γωνίες του παραπληρωματικές είναι ορθογώνιο.
7. Υπάρχει τετράπλευρο με ίσες διαγώνιους και δεν είναι παραλληλόγραμμο.
8. Υπάρχει τετράπλευρο που οι διαγώνιοί του είναι κάθετες και δεν είναι ρόμβος.
9. Ένα τετράπλευρο που έχει δύο απέναντι γωνίες ορθές είναι ορθογώνιο.
10. Ένα παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές γωνίες ίσες είναι ορθογώνιο.

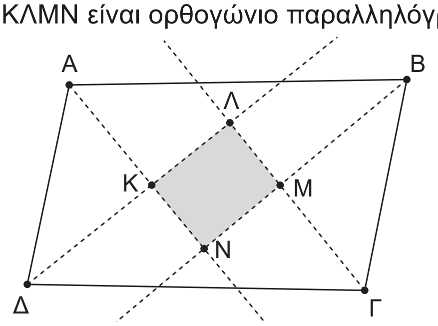
Ασκήσεις

1. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και το τετράγωνο ΒΓΔΕ. Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών $B\hat{A}E = x$ και $A\hat{E}\Delta = \omega$.



2. Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε τις ΑΒ και ΓΔ προς τα σημεία Β και Δ και θεωρούμε τα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $BE = \Delta Z$. Να αποδείξετε ότι:
   α) Το ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.
   β) Τα τρίγωνα ΔΓΕ και ΑΖΒ είναι ίσα.
   γ) Τα τμήματα ΑΓ, ΖΕ και ΔΒ διχοτομούνται.

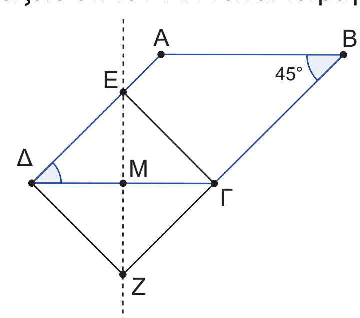
3. Στο παραλληλόγραμμο του παρακάτω σχήματος έχουμε φέρει τις διχοτόμους των τεσσάρων γωνιών του. Ανά δύο τέμνονται και σχηματίζουν το τετράπλευρο ΚΛΜΝ. Να αποδείξετε ότι το ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



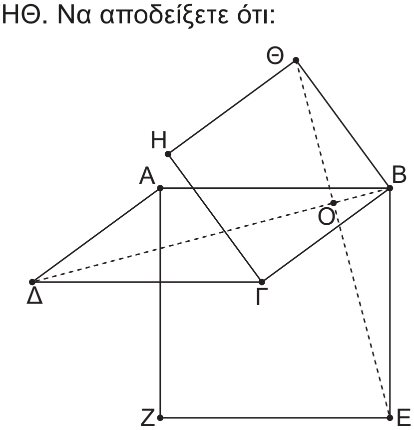
4. Σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, θεωρούμε Ε και Ζ τα μέσα των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν Η είναι το σημείο τομής των ΑΖ και ΒΕ και Θ το σημείο τομής των ΔΖ και ΓΕ, να αποδείξετε ότι το ΕΘΖΗ είναι ρόμβος.

5. Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ φέρουμε $BE \perp A\Gamma$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{B}E$ τέμνει τη ΓΔ στο Ζ, να αποδείξετε ότι $B\Gamma = \Gamma Z$.

6. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{B} = 45°$. Φέρουμε κάθετη ευθεία στο ΓΔ που διέρχεται από το μέσο του Μ. Ονομάζουμε Ε και Ζ τα σημεία στα οποία η ευθεία αυτή τέμνει τις ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα (όπως στο σχήμα). Να αποδείξετε ότι το ΔΕΓΖ είναι τετράγωνο.



7. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα τετράγωνα ΑΒΕΖ και ΒΓΗΘ. Να αποδείξετε ότι:



α) Οι γωνίες $Γ\hat{B}Ε$ και $Α\hat{B}Θ$ είναι ίσες με $Δ\hat{A}B - 90^o$.

β) Τα τμήματα ΘΕ και ΔΒ είναι ίσα.

γ) Τα τμήματα ΘΕ και ΔΒ είναι κάθετα.

8. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και πάνω στις πλευρές ΑΔ και ΔΓ αντίστοιχα τα σημεία Κ και Λ ώστε $ΑΚ = ΔΛ$. Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΕ = ΔΗ.

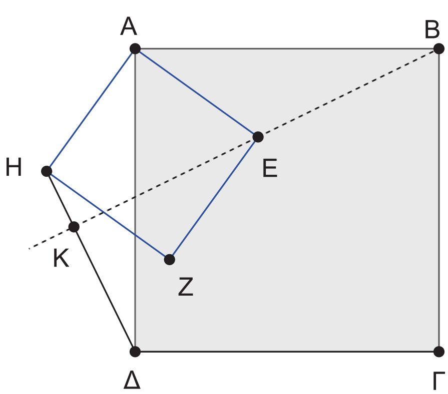
β) Οι ευθείες ΕΒ και ΔΗ είναι κάθετες.

9. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε τα τετράγωνα ΑΒΓΔ και ΑΕΖΗ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $ΒΕ = ΔΗ$.

β) Οι ευθείες ΕΒ και ΔΗ είναι κάθετες.



10. Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ θεωρούμε τυχαίο σημείο Ε στην πλευρά ΔΓ. Φέρουμε τη διχοτόμο ΑΖ της γωνίας $Ε\hat{A}Β$ και την ΔΛ κάθετο στη διχοτόμο ΑΖ (όπως στο σχήμα).

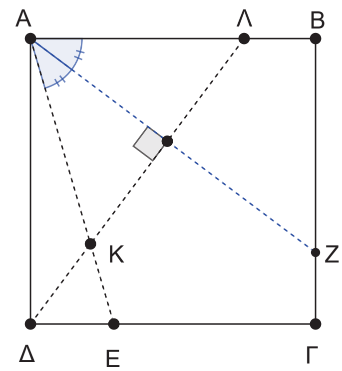
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΚΛ είναι ισοσκελές.

β) ΚΕ = ΔΕ.

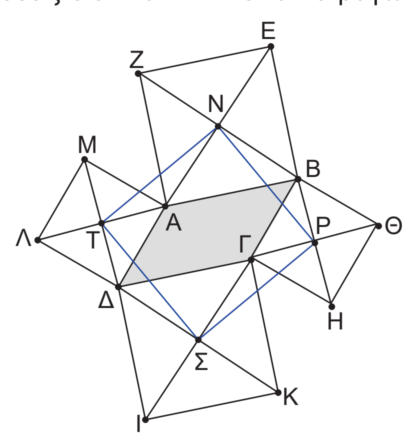
γ) ΔΛ = ΑΖ.

δ) ΑΕ = ΒΖ + ΔΕ.



11. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Έξω από αυτό κατασκευάζουμε τετράγωνα ΑΒΕΖ, ΒΓΗΘ, ΓΔΙΚ, ΔΑΜΛ (όπως στο σχήμα).

Αν Ν, Ρ, Σ, Τ τα κέντρα των τετραγώνων να αποδείξτε ότι το ΝΡΣΤ είναι τετράγωνο.



Σε τι χρησιμεύουν τα παραπάνω.

Με όσα έχουμε ήδη αναφέρει μπορούμε να κατασκευάσουμε τα κοινά εξωτερικά εφαπτόμενα τμήματα των κύκλων (Κ,ρ) και (Λ,R) (Σχ. 10).

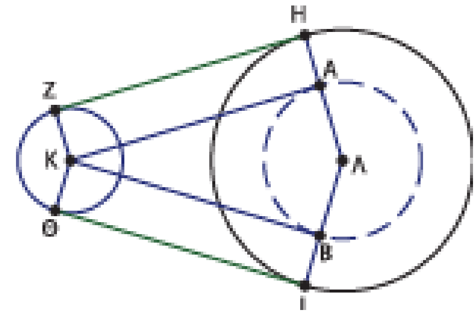
α) Γράφουμε τον κύκλο (Λ, R – ρ).

β) Κατασκευάζουμε τις εφαπτόμενες που άγονται από το σημείο Κ προς τον κύκλο (Λ, R – ρ).

γ) Κατασκευάζουμε τα τμήματα ΛΗ και ΛΙ, όπως στο σχήμα.

δ) Σχηματίζουμε τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα ΖΚΗΑ και ΚΘΙΒ.

ε) Τα τμήματα ΖΗ και ΘΙ είναι τα κοινά εφαπτόμενα τμήματα των δύο κύκλων.



Σχήμα (10)

Αιτιολογείστε γιατί με την κατασκευή αυτή τα ΖΗ και ΘΙ είναι κοινά εφαπτόμενα τμήματα των δύο κύκλων.

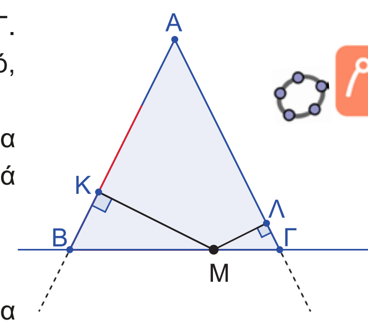
Στιγμές από την ιστορία των Μαθηματικών

Ο **Vincenzo Viviani (1622-1703)** ήταν Ιταλός μαθηματικός, μαθητής των Torricelli και Galileo. Ασχολήθηκε με μια ιδιότητα των ισοσκελών τριγώνων διατυπώνοντας ένα θεώρημα, που προς τιμή του ονομάζεται Θεώρημα του Viviani.

Τι λέει το θεώρημα αυτό;

Σε ισοσκελές τρίγωνο θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ της βάσης του ΒΓ. Φέρουμε $ΜΚ \perp ΑΒ$ και $ΜΛ \perp ΑΓ$. Το άθροισμα ΜΚ+ΜΛ είναι σταθερό, δηλαδή δεν εξαρτάται από τη θέση του σημείου Μ.

Στην περίπτωση όπου το σημείο Μ βρίσκεται στην ευθεία που ορίζουν τα σημεία Β και Γ, αλλά είναι εξωτερικό σημείο του ΒΓ, τότε η διαφορά $|ΜΚ - ΜΛ|$ είναι σταθερή.



Υπόδειξη:

Με τη βοήθεια του αρχείου GeoGebra μετακινήστε τα σημεία, μελετήστε τα αριθμητικά δεδομένα και διατυπώστε μία εικασία σχετικά με το άθροισμα ή τη διαφορά των αποστάσεων και του μήκους του ύψους ΒΔ του τριγώνου ΑΒΓ.

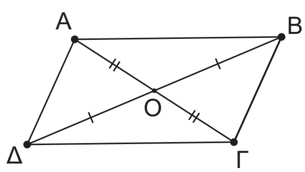
Με βάση τα όσα παρατηρήσατε στο αρχείο GeoGebra δικαιολογήστε, με καθαρά γεωμετρικούς όρους, την αλήθεια της εικασίας σας αξιοποιώντας βασικές ιδιότητες των ορθογώνιων παραλληλογράμμων που εμφανίζονται.

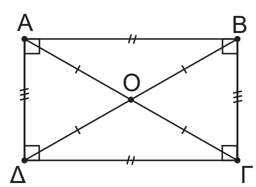
Εργασία για το σπίτι

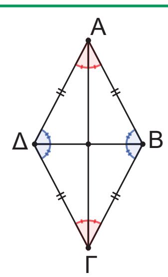
- Με τη βοήθεια της υπόδειξης να λύσετε την άσκηση.
- Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο Μ στο εσωτερικό ενός ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ και φέρουμε τις κάθετες προς τις πλευρές του. Να δικαιολογήσετε ότι το άθροισμα των αποστάσεων αυτών είναι ίσο με ένα οποιοδήποτε ύψος του ισόπλευρου τριγώνου (όλα τα ύψη σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο είναι ίσα).
- Ανοίξτε την εφαρμογή GeoGebra, μετακινήστε τα σημεία, παρατηρήστε.
  Διατυπώστε μία εικασία στο ερώτημα που τίθεται.

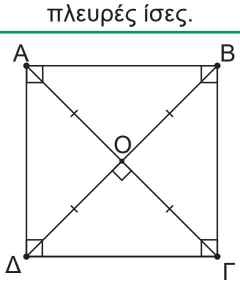
ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Συνοψίζοντας τα προηγούμενα καταλήγουμε στον παρακάτω πίνακα:

<table>
<tr><th></th><th>Σχήμα - ορισμός</th><th>Ιδιότητες</th><th>Για να δείξω ότι ένα τετράπλευρο είναι... αρκεί να</th></tr>
<tr><td>Παραλληλόγραμμο</td><td>

Είναι το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.</td><td>Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.
Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.</td><td>Έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες (ορισμός), ή
έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, ή
έχει 2 απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, ή
έχει τις απέναντι γωνίες του ίσες, ή
οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.</td></tr>
<tr><td>Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο</td><td>

Είναι το παραλληλόγραμμο που έχει μία γωνία ορθή.</td><td>Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.
Όλες οι γωνίες του είναι 90°
Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και διχοτομούνται.</td><td>Είναι παραλληλόγραμμο και έχει μία ορθή γωνία, ή
είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του είναι ίσες, ή
έχει τρεις γωνίες ορθές, ή
όλες οι γωνίες του να είναι ίσες.</td></tr>
<tr><td>Ρόμβος</td><td>

Είναι το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.</td><td>Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.
Όλες του οι πλευρές είναι ίσες.
Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, τέμνονται κάθετα και διχοτομούν τις γωνίες του.</td><td>Είναι παραλληλόγραμμο και να έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες, ή
είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του να τέμνονται κάθετα, ή
είναι παραλληλόγραμμο και μία διαγώνιός του να διχοτομεί μία γωνία του, ή
έχει όλες τις πλευρές του ίσες.</td></tr>
<tr><td>Τετράγωνο</td><td>

Είναι το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος</td><td>Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.
Όλες οι πλευρές του είναι ίσες.
Όλες οι γωνίες του είναι ορθές.
Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, είναι ίσες, τέμνονται κάθετα και διχοτομούν τις γωνίες του.</td><td>Είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ρόμβος.</td></tr>
</table>

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΦΥΛΛΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Ερωτήσεις θεωρίας (μονάδες: 4 + 2 + 4=10)

α) Να αποδείξετε ότι, αν ένα τετράπλευρο έχει τις απέναντι γωνίες του ίσες, τότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Να γράψετε τις ιδιότητες που έχει ένας ρόμβος σε σχέση με τις πλευρές του, τις γωνίες του και τις διαγώνιους του.

γ) Συμπληρώστε κατάλληλα τις παρακάτω προτάσεις.

1. Το τετράπλευρο που έχει όλες τις γωνίες του ίσες είναι ……………..
2. Το τετράπλευρο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες είναι ……………..
3. Το παραλληλόγραμμο που έχει τις διαγωνίους του ίσες και κάθετες είναι ……………..
4. Το τετράπλευρο που έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες είναι ………...

Άσκηση 1η (μονάδες 4)

Δίνεται τετράγωνο $ΑΒΓΔ$. Έξω από αυτό κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ και ΒΓΖ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΖ είναι ισόπλευρο.

Άσκηση 2η (μονάδες 6)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$. Θεωρούμε τα μέσα Δ και Ε των πλευρών του ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την $ΔΕ$ και θεωρούμε σημείο $Ζ$ ώστε $ΔΕ = ΕΖ$. Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο $ΑΖΓΔ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και

β) η ΒΖ διχοτομεί την ΑΔ.

Κεφαλαιο 5

Εφαρμογές παραλληλογράμμων

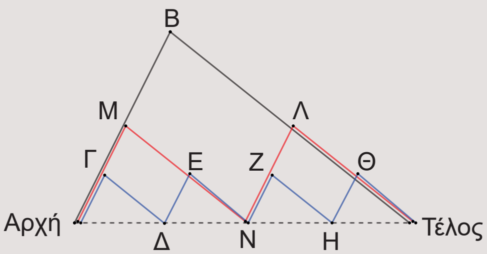
5.1
Βασικά θεωρήματα στο τρίγωνο

Τι καινούργιο υπάρχει στην ενότητα

Στις παρακάτω σελίδες:

- θα μάθουμε για το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου.

Δραστηριότητα



Μια ομάδα παιδιών έτρεξαν έναν αγώνα δρόμου ξεκινώντας από την **αφετηρία (Αρχή)** μέχρι τον **τερματισμό (Τέλος).**

Η διαδρομή που το κάθε παιδί επέλεξε ήταν διαφορετική.

Ο Γιώργος ακολούθησε τη διαδρομή Αρχή $\rightarrow$ Β $\rightarrow$ Τέλος

Ο Δημήτρης την «κόκκινη» διαδρομή

Αρχή $\rightarrow$ Μ $\rightarrow$ Ν $\rightarrow$ Λ $\rightarrow$ Τέλος ,

όπου Μ το μέσο της απόστασης Αρχή-Β, Ν το μέσο της απόστασης Αρχή-Τέλος και Λ το μέσο της απόστασης Β-Τέλος.

Η Άννα ακολούθησε τη «μπλε» διαδρομή Αρχή $\rightarrow$ Γ $\rightarrow$ Δ $\rightarrow$ Ε $\rightarrow$ Ν $\rightarrow$ Ζ $\rightarrow$ Η $\rightarrow$ Θ $\rightarrow$ Τέλος, με τα σημεία Γ, Δ, Ε, Ν, Β, Η, Θ να είναι τα μέσα αντίστοιχων διαδρομών, όπως παρουσιάζονται στο σχήμα. Με τη λογική αυτή των διαρκώς αυξανόμενων ως προς το πλήθος ζικ ζακ έτρεξαν και τα άλλα παιδιά, χωρίζοντας στη μέση διαρκώς προηγούμενες διαδρομές, για να κόψουν δρόμο, όπως είπαν.

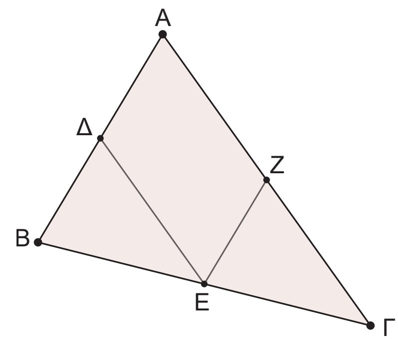
Η έκπληξη ήταν μεγάλη, σχεδόν έφθασαν ταυτόχρονα, λες και ότι όλες οι διαδρομές που επέλεξαν ήταν ίσες μεταξύ τους! Ή μήπως είναι;

Κάποια στιγμή η μικρότερη της παρέας διατύπωσε μία εύλογη απορία.

«Λέτε ότι όλες οι διαδρομές είναι ίσες. Αν τις συνεχίζαμε συνεχώς με τον ίδιο τρόπο θα φθάναμε σε ένα σημείο, όπου η διαδρομή που θα επιλέγαμε θα ταυτιζόταν με την Αρχή $\to$ Τέλος. *Ίση και αυτή με τις προηγούμενες; Τότε κάτι περίεργο συμβαίνει, η τελευταία διαδρομή* Αρχή $\to$ Τέλος *και η πρώτη* Αρχή $\to$ Β $\to$ Τέλος *θα είναι ίσες. Γίνεται αυτό;*
Η τριγωνική ανισότητα που μάθαμε τι έγινε; Πήγε και αυτή για τρέξιμο;»

Ας δούμε τι έχει προκύψει. (Σχ.1)

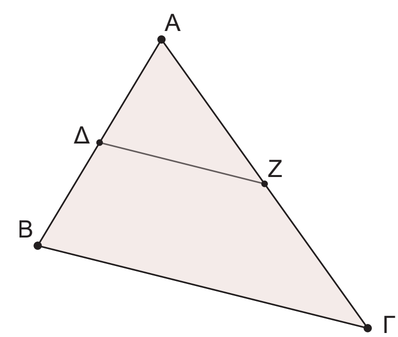
Όπως θα παρατηρήσετε στο προηγούμενο «παράδοξο» στην αρχή τα πράγματα μάλλον είναι απλά.
Μετά η διαδικασία μοιάζει να επαναλαμβάνεται συνεχώς.
Σε όλους έχει γεννηθεί η υποψία ότι στο τρίγωνο ΑΒΓ αν έχουμε Δ,Ε,Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΒ,ΒΓ,ΓΑ αντίστοιχα θα είναι $ΔΕ \parallel= ΑΖ$ (δηλαδή ΔΕ || ΑΖ και ΔΕ = ΑΖ), $ΑΔ \parallel= ΕΖ$, λόγω του παραλληλογράμμου που πιθανολογούμε ότι εμφανίζεται. Γιατί όμως να συμβαίνει αυτό;
Ήρθε η στιγμή να αποδείξουμε μερικά από τα πλέον βασικά θεωρήματα που εφαρμόζονται σε ένα τρίγωνο.



Σχήμα 1

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της. (Σχ.2)

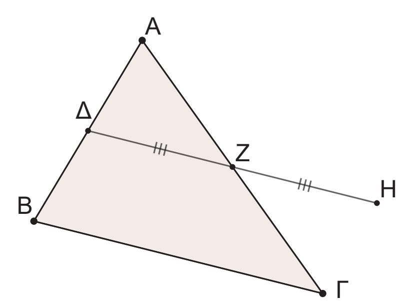


Σχήμα 2

Αποδειξη

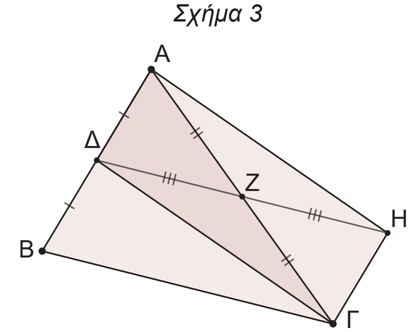
Έστω Δ και Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα του τριγώνου ΑΒΓ.
Θα αποδείξουμε ότι $ΔΖ \parallel ΒΓ$ και $ΔΖ = \dfrac{ΒΓ}{2}$.

Με όσα έχουμε μάθει μέχρι τώρα είμαστε σε θέση να συγκρίνουμε δύο ευθύγραμμα τμήματα ή δύο γωνίες. Δεν έχουμε αντιμετωπίσει άλλη φορά την πρόκληση να δείξουμε ότι ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι ίσο με το μισό κάποιου άλλου. Για να ξεπεράσουμε το πρόβλημα αυτό δεν έχουμε παρά να κατασκευάσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ίσο με 2ΔΖ και μετά απλώς να το συγκρίνουμε ως ενιαίο πια ευθύγραμμο τμήμα με το ΒΓ. Πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε ευθύγραμμο τμήμα ίσο με 2ΔΖ; (Σχ.3)



Σχήμα 3

Προεκτείνουμε το ΔΖ προς το Ζ και θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα $ΖΗ = ΔΖ$.
Τώρα πρέπει να είμαστε λίγο προσεκτικοί. Θα δούμε ότι σχηματίζεται το παραλληλόγραμμο ΑΔΓΗ (οι διαγώνιοί του διχοτομούνται).
Οπότε $ΑΔ \parallel= ΗΓ$.
Άρα θα είναι και $ΗΓ \parallel= ΔΒ$, δηλαδή και το ΒΔΗΓ είναι παραλληλόγραμμο (έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες). (Σχ. 4)

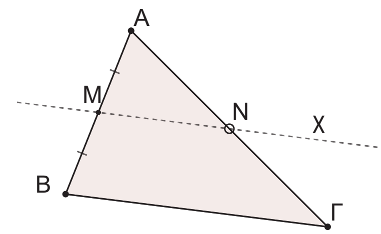


Σχήμα 4

Επομένως, $ΔΗ \parallel= ΒΓ$ από όπου έχουμε τελικά ότι $ΔΗ \parallel ΒΓ$ άρα και $ΔΖ \parallel ΒΓ$ και $ΔΗ = ΒΓ \Leftrightarrow 2ΔΖ = ΒΓ \Leftrightarrow ΔΖ = \dfrac{ΒΓ}{2}$. ■

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του. (Σχ.5)



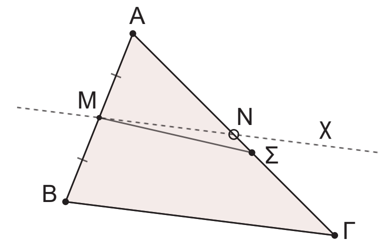
Σχήμα 5

Αποδειξη

Έστω Μ το μέσο της ΑΒ και η ευθεία Μx παράλληλη της ΒΓ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ν. Θα αποδείξουμε ότι το σημείο αυτό είναι το μέσο του ΑΓ.

Θα εργαστούμε με τη μέθοδο της «εις άτοπον απαγωγή» (Σχ. 6).

Ας υποθέσουμε ότι το σημείο Ν δεν είναι το μέσο του ΑΓ και ότι ένα άλλο σημείο Σ είναι το μέσο του ΑΓ. Τότε από το προηγούμενο θεώρημα το ΜΣ θα ήταν παράλληλο του ΒΓ. Δηλαδή, από το Μ έχουμε την δυνατότητα να φέρουμε $ΜΝ \parallel ΒΓ$ και $ΜΣ \parallel ΒΓ$. Άτοπο! Διότι το συμπέρασμα αυτό έρχεται σε αντίθεση με το 5° αίτημα του Ευκλείδη. Άρα, το σημείο Ν είναι το μέσο του ΑΓ. ■



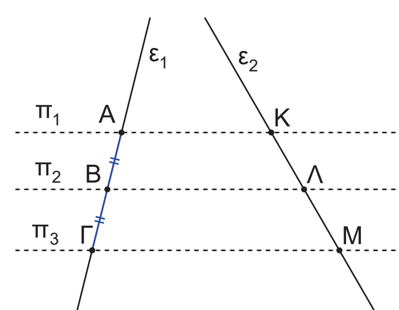
Σχήμα 6

Τα θεωρήματα αυτά βρίσκουν τη γενίκευσή τους στο επόμενο θεώρημα.

Πρόκειται για την απλή εκδοχή του **θεωρήματος του Θαλή**, που τη γενίκευσή του θα την συναντήσουμε στην επόμενη τάξη του Λυκείου.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3ο

Αν τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει. (Σχ.7)



Σχήμα 7

Αποδειξη

Ας υποθέσουμε ότι πάνω στην $ε_1$ έχουμε τα ίσα τμήματα ΑΒ και ΒΓ. Από τα σημεία Α,Β,Γ φέρουμε τις παράλληλες $π_1, π_2, π_3$ που ορίζουν πάνω στην $ε_2$ τα τμήματα ΚΛ και ΛΜ.

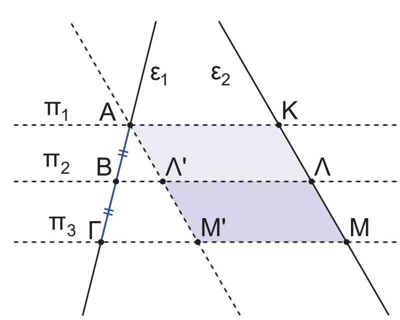
Θα αποδείξουμε ότι $ΚΛ = ΛΜ$.

Φανταστείτε ότι από το Α φέρουμε μία παράλληλη προς την $ε_2$ η οποία τέμνει τις παράλληλες στα σημεία Λ΄ και Μ΄. (Σχ.8)

Σχηματίζονται παραλληλόγραμμα (Γιατί;)

Άρα $ΚΛ = ΑΛ'$ και $ΛΜ = Λ'Μ'$.

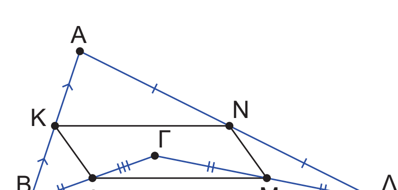
Συγχρόνως στο τρίγωνο ΑΓΜ' το Β είναι μέσο του ΑΓ και $ΒΛ' \parallel ΓΜ'$, άρα από το 2° θεώρημα το Λ' θα είναι το μέσο του $ΑΜ'$, δηλαδή $ΑΛ' = Λ'Μ'$, άρα και $ΚΛ = ΛΜ$. ■



Σχήμα 8

Παραδειγματα

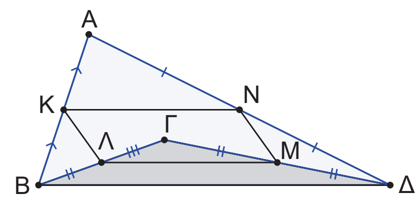
1. **Έστω ΑΒΓΔ ένα τετράπλευρο, όπως στο σχήμα. Θεωρούμε τα μέσα Κ, Λ, Μ και Ν των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.**



ΛΥΣΗ

Όταν σε άσκηση γεωμετρίας έχουμε στις υποθέσεις μέσα τμημάτων, τότε προσπαθούμε να εφαρμόσουμε το 1ο θεώρημα. Δηλαδή, να βρούμε τρίγωνο στο οποίο έχουμε φέρει τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του. Βλέπετε τέτοια τρίγωνα; Αν όχι, μπορείτε να φέρετε όποια βοηθητική ευθεία θέλετε, ώστε να εξυπηρετείται η στρατηγική σας.

Αν φέρουμε την ΒΔ τότε σχηματίζονται τα τρίγωνα:



ΑΒΔ στο οποίο έχουμε $\begin{cases} \text{Κ μέσο ΑΒ} \\ \text{Ν μέσο ΑΔ} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ΚΝ \parallel ΒΔ \\ ΚΝ = \dfrac{ΒΔ}{2} \end{cases}$ (1)

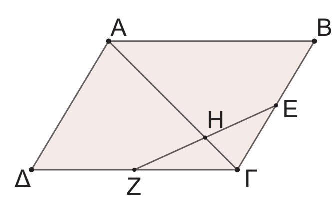
ΓΒΔ στο οποίο έχουμε $\begin{cases} \text{Λ μέσο ΒΓ} \\ \text{Μ μέσο ΓΔ} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ΛΜ \parallel ΒΔ \\ ΛΜ = \dfrac{ΒΔ}{2} \end{cases}$ (2)

Από (1) και (2) παίρνουμε τελικά ότι $ΚΝ \parallel ΛΜ$ και $ΚΝ = ΛΜ$, άρα το ΚΝΜΛ είναι παραλληλόγραμμο (έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες).

Δραστηριότητα κατανόησης

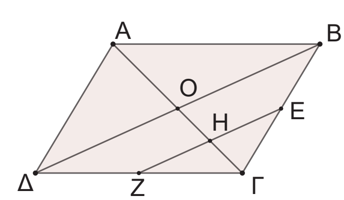
Ανοίξτε το αρχείο GeoGebra. Με το «βελάκι» κινήστε την κορυφή Γ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ. Παρατηρείστε ότι το ΚΛΜΝ είναι πάντα παραλληλόγραμμο, όπως το αποδείξαμε.
Ο στόχος της δραστηριότητας είναι να βρείτε ποιες επιπλέον ιδιότητες πρέπει να έχει το αρχικό τετράπλευρο ΑΒΓΔ, ώστε το ΚΛΜΝ να είναι:
Α) ορθογώνιο πραλληλόγραμμο. **Β)** ρόμβος **Γ)** τετράγωνο
Αφού υποψιαστείτε τι πρέπει να ισχύει προσπαθήστε και να το αποδείξετε.
Το αρχείο GeoGebra θα σας βοηθήσει.

2. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε και Ζ των ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα. Αν η ΕΖ τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Η, να αποδείξετε ότι $ΓΗ = \dfrac{ΑΓ}{4}$.



ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο μέσα τμημάτων και ότι η σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε ουσιαστικά «κρύβει» όχι ένα αλλά δύο μέσα, διότι η σχέση αυτή μπορεί να διαβαστεί ότι το ΓΗ είναι ίσο με το μισό του μισού του ΑΓ! Μπορούμε να εμφανίσουμε το μισό του ΑΓ;
Εύκολα, αν φέρουμε και την άλλη διαγώνιο οπότε το **κέντρο Ο** του παραλληλογράμμου είναι το μέσο και της ΑΓ και της ΔΒ. Επομένως μένει να δείξουμε ότι το Η είναι το μέσο του ΓΟ.
Αυτό παραπέμπει στο 2ο θεώρημα.



Οπότε, φέρουμε την διαγώνιο ΔΒ και ονομάζουμε Ο το κέντρο του παραλληλογράμμου.
Επειδή $ΟΓ = \dfrac{ΑΓ}{2}$ μένει να δείξουμε ότι $ΓΗ = \dfrac{ΟΓ}{2}$ ή ότι το σημείο Η είναι το μέσο του ΟΓ. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί στο τρίγωνο ΟΒΓ, αφού έχουμε το Ε μέσο του ΒΓ, αλλά μένει να δείξουμε ότι $ΕΗ \parallel ΟΒ$.

Εδώ παρατηρούμε ότι προκειμένου να αποδείξουμε μία πρόταση, χρησιμοποιούμε μία από τις βασικές στρατηγικές της Γεωμετρίας που είναι ο συνδυασμός διαφόρων σχετικών θεωρημάτων μεταξύ τους.

Στο τρίγωνο ΔΒΓ έχουμε: $\begin{cases} \text{Ε μέσο ΒΓ} \\ \text{Ζ μέσο ΔΓ} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ΕΖ \parallel ΔΒ \\ ΕΖ = \dfrac{ΔΒ}{2} \end{cases}$.

Στο τρίγωνο ΟΓΒ έχουμε: $\begin{cases} \text{Ε μέσο ΒΓ} \\ ΕΗ \parallel ΒΟ \end{cases} \Rightarrow$ Η μέσο ΟΓ. Άρα $ΓΗ = \dfrac{ΓΟ}{2} = \dfrac{\frac{ΑΓ}{2}}{2} = \dfrac{ΑΓ}{4}$.

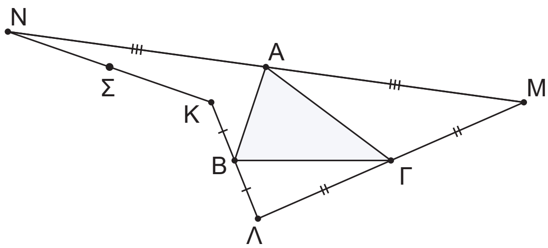
Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους

1. Τα τμήματα που συνδέουν τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου το χωρίζουν σε τέσσερα ίσα μεταξύ τους τρίγωνα.
2. Τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα μέσα των μη διαδοχικών πλευρών τετράπλευρου διχοτομούνται.
3. Τα μέσα των πλευρών ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου είναι κορυφές ορθογώνιου παραλληλογράμμου.
4. Τα μέσα των πλευρών ενός ρόμβου είναι κορυφές ορθογώνιου παραλληλογράμμου.
5. Τα μέσα των πλευρών ενός τετραγώνου είναι κορυφές τετραγώνου.

Ασκήσεις

1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε τα μέσα Κ,Λ,Μ των πλευρών του. Αν η περίμετρος του ΚΛΜ είναι 5cm, να υπολογίσετε την περίμετρο του ΑΒΓ.
2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Αν Ε,Ζ και Η είναι τα μέσα των ΒΔ, ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.
3. Σε τρίγωνο ΑΒΓ, θεωρούμε το μέσο Δ της διαμέσου ΑΜ. Αν η ΒΔ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε, να αποδείξετε ότι $ΑΕ = \dfrac{ΕΓ}{2}$.
4. Σε τρίγωνο ΑΒΓ το σημείο Ι της ΒΓ είναι τέτοιο ώστε $ΒΙ = \dfrac{ΒΓ}{4}$. Αν Ε μέσο της διαμέσου ΒΔ να αποδείξετε ότι $ΙΕ \parallel ΑΒ$ και $ΙΕ = \dfrac{ΑΒ}{4}$.
5. Σε τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ < ΑΓ) θεωρούμε το μέσο Μ της ΒΓ. Από το Β φέρουμε κάθετη στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{Α}$ που την τέμνει στο Δ και την ΑΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι:
   α) $ΕΓ = ΑΓ - ΑΒ$.
   β) $ΔΜ = \dfrac{ΑΓ - ΑΒ}{2}$.
   γ) $Β\hat{Δ}Μ = 90^\circ + \dfrac{\hat{Α}}{2}$.
6. Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ θεωρούμε Ε, Ζ, Η, Θ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ και Κ, Λ τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ.
   Να αποδείξετε ότι:
   α) Τα ΕΚΗΛ και ΖΚΘΛ είναι παραλληλόγραμμα.
   β) Τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΗ, ΖΘ, ΛΚ διέρχονται από το ίδιο σημείο.
7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ = 2ΑΒ. Από το Β φέρουμε κάθετη στη διχοτόμο ΑΔ που τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Αν Ε το σημείο τομής της ΑΔ και της ΒΖ και Μ το μέσο της ΒΓ να αποδείξετε ότι:
   α) Το Ζ είναι μέσο της ΑΓ.
   β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΖ είναι ίσα.
   γ) Οι γωνίες $Δ\hat{Ζ}Μ$ και $\hat{Γ}$ είναι ίσες.

8. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Κ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Θεωρούμε σημείο Λ στην προέκταση της ΚΒ προς το Β ώστε ΚΒ = ΒΛ, σημείο Μ στην προέκταση της ΛΓ προς το Γ ώστε ΛΓ = ΓΜ και σημείο Ν στην προέκταση της ΜΑ προς το Α ώστε ΜΑ = ΑΝ.



Να αποδείξετε ότι το μέσο Σ του ΚΝ είναι **σταθερό σημείο**. Δηλαδή, σε όποια θέση και αν είναι το αρχικό σημείο Κ, το σημείο Σ θα βρίσκεται στην ίδια θέση στο επίπεδο.

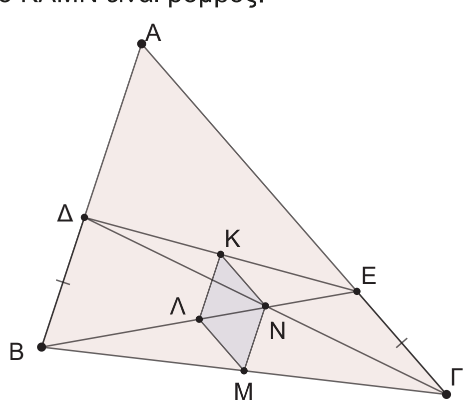
9. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ θεωρούμε Κ,Λ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα.
Αν η διχοτόμος ΑΔ τέμνει το τμήμα ΚΛ στο σημείο Ε και η ευθεία ΒΕ την ΑΓ στο Ζ, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΚΕ είναι ισοσκελές.

β) Να αποδείξετε ότι $ΛΕ = \dfrac{ΑΓ - ΑΒ}{2}$.

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

10. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ και Ε στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα ώστε ΒΔ = ΕΓ. Αν Μ μέσο του ΒΓ, Κ μέσο του ΔΕ, Ν μέσο του ΓΔ και Λ μέσο του ΒΕ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.



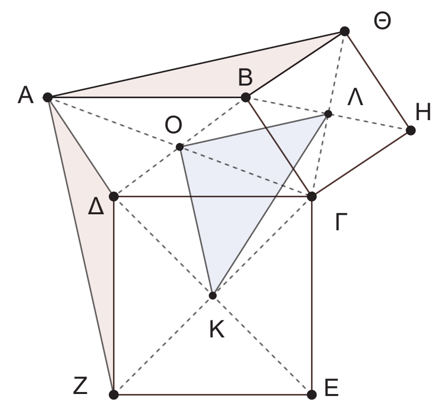
11. Ένα σημείο Β κινείται πάνω σε μία ευθεία ε και ένα άλλο σημείο Α είναι σταθερό εκτός της ευθείας. Να βρείτε την ευθεία στην οποία κινούνται τα μέσα Μ των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΒ.

12. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έξω από αυτό κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΔΓΕΖ και ΒΓΗΘ. Έστω Ο, Κ, Λ τα κέντρα των ΑΒΓΔ, ΔΓΕΖ και ΒΓΗΘ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΘ και ΑΔΖ είναι ίσα.

β) Η γωνία $Ζ\hat{Α}Θ$ είναι 90°.

γ) Το τρίγωνο ΚΟΛ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.



13. Ένα σημείο Β κινείται πάνω σε έναν κύκλο (Ο,ρ) και ένα άλλο σημείο Α είναι σταθερό εξωτερικό του κύκλου. Να βρείτε την ευθεία στην οποία κινούνται τα μέσα Μ των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΒ.

14. Να αποδείξετε ότι ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές, αν έχει δύο διαμέσους ίσες π.χ. $μ_β = μ_γ$

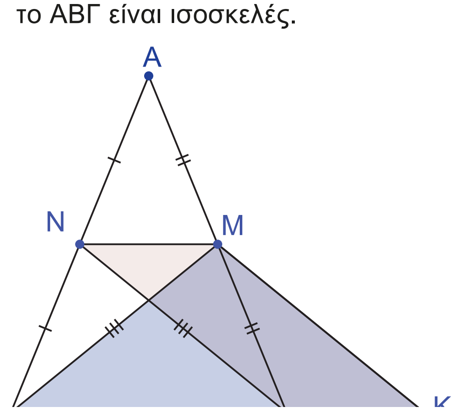
Υπόδειξη

Έστω ΒΜ και ΓΝ διάμεσοι του ΑΒΓ. Φέρουμε ΜΚ παράλληλη της ΝΓ (όπως στο σχήμα). Να αποδείξετε ότι:

α) το ΝΜΚΓ είναι παραλληλόγραμμο.

β) το τρίγωνο ΒΜΚ είναι ισοσκελές.

γ) το ΑΒΓ είναι ισοσκελές.



5.2
Βασικά θεωρήματα στο ορθογώνιο τρίγωνο

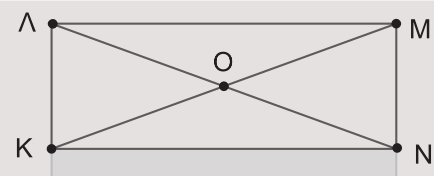
Τι καινούργιο υπάρχει στην ενότητα

Στις παρακάτω σελίδες θα μάθουμε για τη σχέση μεταξύ:

- υποτείνουσας ορθογώνιου τριγώνου και διαμέσου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα,
- υποτείνουσας ορθογώνιου τριγώνου και καθέτου πλευράς απέναντι από γωνία 30^o.

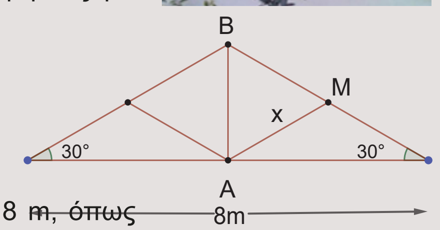
Δραστηριότητα

Σιδερένιες και ξύλινες κατασκευές



Ένα συνηθισμένο σιδερένιο κάγκελο παρουσιάζεται στη διπλανή εικόνα. Αποτελείται από ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, στο οποίο έχουν φέρει τις δύο διαγωνίους του. Οι κατασκευαστές ισχυρίζονται ότι το σίδερο ΚΟ είναι το μισό του μήκους του ΝΛ.

Με βάση τον ισχυρισμό αυτό γενικεύουν το συμπέρασμά τους και ισχυρίζονται ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η διάμεσος προς την υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της. Συγχρόνως, την ιδιότητα αυτή την χρησιμοποιούν για να διαπιστώσουν αν ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο. Ποια είναι η γνώμη σας για τον ισχυρισμό αυτό;



Όμοια, όταν κατασκευάζουμε ξύλινες στέγες, το πλαίσιο πάνω στο οποίο θα στηριχθεί η όλη κατασκευή είναι ένα ισοσκελές τρίγωνο με γωνία βάσης 30^o, ώστε να υπάρχει η κατάλληλη κλίση για να φεύγουν τα νερά.

Ο κατασκευαστής ισχυρίζεται ότι χρειάζεται ένα δοκάρι μήκους 8 m, όπως στο σχήμα και τα υπόλοιπα ξύλινα στοιχεία έχουν συνολικό μήκος 7x, όπου x το μήκος της διαμέσου ΑΜ στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ.

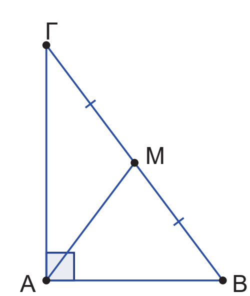
Ποια η γνώμη σας για τον ισχυρισμό αυτό;

Ας δούμε τι έχει προκύψει

Από το προηγούμενο πρόβλημα διαπιστώσαμε ότι στο ορθογώνιο τρίγωνο η διάμεσος προς την υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της. Γιατί να συμβαίνει όμως κάτι τέτοιο;

ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Η διάμεσος ορθογώνιου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας. (Σχ.9)



Σχήμα 9

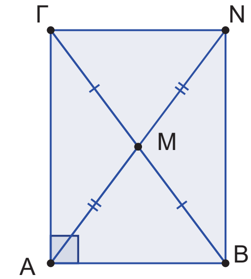
Αποδειξη

Δηλαδή, αν Μ το μέσο της ΒΓ, θα δείξουμε ότι $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2}$ ή ότι $2ΑΜ = ΒΓ$.

Ας εμφανίσουμε ένα τμήμα ίσο με 2ΑΜ και μετά θα προσπαθήσουμε να αποδεί-

ξουμε ότι αυτό θα είναι ίσο με την ΒΓ.
Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά τμήμα ΜΝ = ΑΜ. (Σχ.10)
Σχηματίζεται το τετράπλευρο ΑΒΝΓ, το οποίο είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι διαγώνιοί του διχοτομούνται (Μ μέσο ΑΒ και ΑΜ = ΜΝ από κατασκευή).

Επειδή $\hat{A} = 90°$, θα είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Οπότε οι διαγώνιοι του διχοτομούνται και είναι ίσοι, άρα $AN = B\Gamma \Leftrightarrow 2AM = B\Gamma \Leftrightarrow AM = \frac{B\Gamma}{2}$. ■

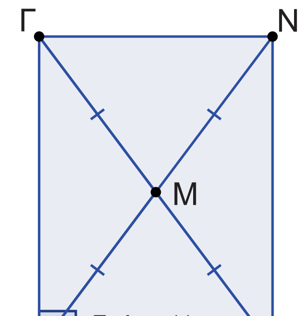


Σχήμα 10

Το θεώρημα ισχύει και αντίστροφα, όπως αποδεικνύεται στο επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

Αν η διάμεσος ενός τριγώνου είναι ίση με το μισό της πλευράς που αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή. (Σχ.11)



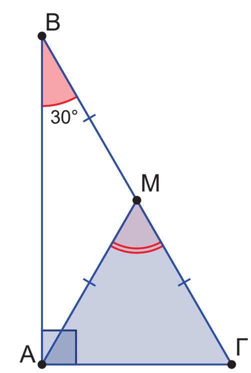
Σχήμα 11

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε φέρει τη διάμεσο ΑΜ για την οποία ισχύει ότι $AM = \frac{B\Gamma}{2}$. Θα αποδείξουμε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.
Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά τμήμα ΜΝ = ΑΜ.
Σε συνδυασμό με την υπόθεση έχουμε τώρα ότι $AM = MN = MB = M\Gamma$.
Οπότε, στο τετράπλευρο ΑΒΝΓ ισχύει ότι οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και είναι ίσοι, επομένως, είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Δηλαδή $\hat{A} = 90°$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. ■

ΘΕΩΡΗΜΑ 3

Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μία γωνία του είναι ίση με 30°, τότε η απέναντι πλευρά της είναι το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα. (Σχ.12)



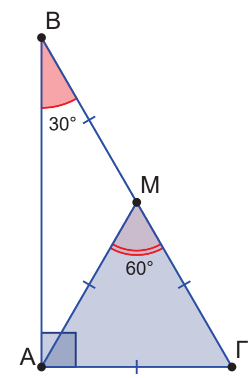
Σχήμα 12

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για να αποδείξουμε το ευθύ του θεωρήματος θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 1° και θα φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ.
Οπότε $AM = MB = M\Gamma$.
Τότε σχηματίζονται δύο ισοσκελή τρίγωνα τα ΑΜΒ και ΑΜΓ.
Επειδή $\hat{B} = 30°$, η $A\hat{M}\Gamma$ ως εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου ΑΜΒ θα είναι 60°. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΜΓ είναι $A\hat{M}\Gamma = 60°$ άρα θα είναι ισόπλευρο.
Δηλαδή θα είναι $A\Gamma = AM = M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$. ■

Αντίστροφο

Αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η μία κάθετη πλευρά του είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά αυτή είναι ίση με 30°. (Σχ.13)



Σχήμα 13

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

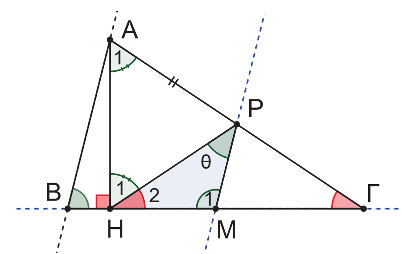
Έστω $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$ (1). Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ του ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ.
Θα είναι ΑΜ = ΜΒ = ΜΓ. Οι ισότητες αυτές σε συνδυασμό με την (1) μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι ΑΓ = ΑΜ = ΜΒ = ΜΓ. Επομένως, το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισόπλευρο. Άρα $\hat{\Gamma} = 60°$, οπότε $\hat{B} = 30°$. ■

Παραδειγματα

1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος του ΑΗ. Αν Ρ και Μ τα μέσα των ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $H\hat{P}M = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.

Λυση

Όταν σε άσκηση γίνεται αναφορά σε **ορθή** γωνία και **μέσο** τμήματος, τότε πρέπει να αναζητούμε τρίγωνο στο οποίο θα εφαρμόσουμε το θεώρημα που αναφέρεται στη διάμεσο προς την υποτείνουσα ορθογώνιου τριγώνου.
Στην συγκεκριμένη άσκηση έχουμε και **δύο μέσα** τμημάτων, οπότε εφαρμόζουμε το θεώρημα που αναφέρεται σε τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου και εκμεταλλευόμαστε τα συμπεράσματά του.



Ας δούμε αν όσα αναφέραμε υπάρχουν στην άσκηση μας.

Παρατηρούμε ότι στο ΑΒΓ έχουμε: $\left.\begin{matrix} P \text{ μέσο } A\Gamma \\ M \text{ μέσο } B\Gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} PM \parallel AB \\ PM = \dfrac{AB}{2} \end{matrix}\right.$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΓ η ΗΡ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα ΑΓ, άρα θα ισχύει $HP = \dfrac{A\Gamma}{2} \Rightarrow HP = AP = P\Gamma$.

Οπότε σχηματίζονται τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΡΗ και ΗΡΓ από όπου θα έχουμε ότι: $\hat{H}_2 = \hat{\Gamma}$ και $\hat{H}_1 = \hat{A}_1$.

Επειδή θέλουμε να βρούμε σχέση για την γωνία θ, ας θυμηθούμε την αλγοριθμική διαδικασία που εφαρμόζουμε σε τέτοιου είδους ασκήσεις.

1ο βήμα: Γράφω τη ζητούμενη γωνία με έναν οποιοδήποτε τρόπο.
Η θ ως γωνία του τριγώνου ΗΡΜ γράφεται $\theta = 180^\circ - \hat{H}_2 - \hat{M}_1$ (1).

2ο βήμα: Προσπαθώ να γράψω τις γωνίες $\hat{H}_1$ και $\hat{M}_1$ συναρτήσει των γωνιών του βασικού σχήματος, δηλαδή των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ.
Βρήκαμε ότι $\hat{H}_2 = \hat{\Gamma}$ και επειδή $PM \parallel AB$ θα είναι $\hat{M}_1 + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{M}_1 = 180^\circ - \hat{B}$.

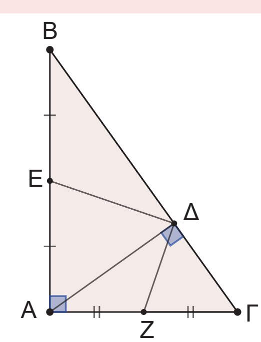
3ο βήμα: Αντικατάσταση και η (1) γίνεται $\theta = 180^0 - \hat{\Gamma} - (180^\circ - \hat{B}) = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.

Είναι προφανές ότι η τελική σχέση μπορεί να αποδειχθεί και με άλλους τρόπους. Η εφαρμογή, όμως, των θεωρημάτων σε ασκήσεις είναι δεξιότητα στην οποία πρέπει να εξασκηθούμε!

2. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^0\right)$ και το ύψος του ΑΔ.

α) Αν Ε,Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ, να αποδείξετε ότι $E\hat{\Delta}Z = \hat{A} = 90^0$.

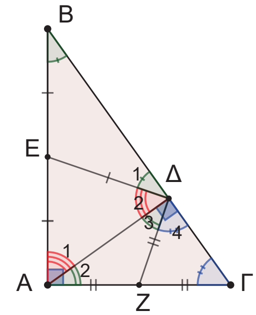
β) Αν Μ είναι το μέσο της ΕΖ, να αποδείξετε ότι $\Delta M = \dfrac{B\Gamma}{4}$.



Λυση

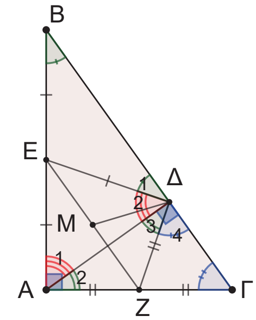
Στα δεδομένα της άσκησης υπάρχουν ορθές γωνίες και μέσα, άρα θα αναζητήσουμε ορθογώνια τρίγωνα στα οποία έχουμε φέρει τη διάμεσο προς την υποτείνουσα.
Επίσης, επειδή υπάρχουν δύο μέσα, θα αναζητήσουμε τρίγωνο στο οποίο έχουμε φέρει ή μπορούμε να φέρουμε το τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του.

Υπάρχουν τέτοια τρίγωνα στο σχήμα μας;
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε ΔΖ διάμεσο προς την υποτείνουσα, άρα θα ισχύουν: $ΔΖ = ΑΖ = ΖΓ$, $\hat{Δ}_3 = \hat{Α}_2$, $\hat{Δ}_4 = \hat{Γ}$.



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε ΔΕ διάμεσο προς την υποτείνουσα, άρα θα ισχύουν: $ΔΕ = ΑΕ = ΒΕ$, $\hat{Δ}_2 = \hat{Α}_1$, $\hat{Δ}_1 = \hat{Β}$.

Η λύση της άσκησης πλέον είναι σαν ένα παζλ, όπου τα διάφορα κομμάτια – σχέσεις που έχουμε ανακαλύψει πρέπει απλώς να μπούνε στη σωστή σειρά!



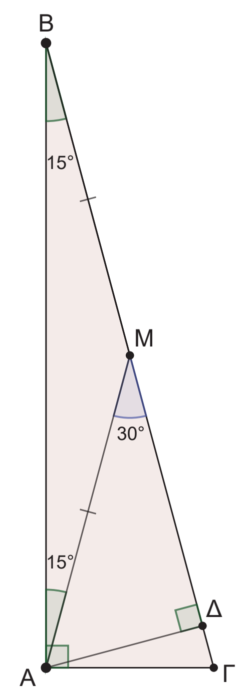
Έχουμε διαδοχικά $Ε\hat{Δ}Ζ = \hat{Δ}_2 + \hat{Δ}_3 = \hat{Α}_1 + \hat{Α}_2 = \hat{Α} = 90^\circ$.

Για το 2ο ερώτημα πρέπει να παρατηρήσουμε και πάλι σε ποια τρίγωνα θα εφαρμόσουμε τα θεωρήματα που μάθαμε.
Έτσι, στο ορθογώνιο πλέον τρίγωνο ΕΔΖ η ΔΜ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα είναι $ΔΜ = \frac{ΕΖ}{2}$.

Στο ΑΒΓ έχουμε $\left.\begin{matrix} Ε \text{ μέσο } ΑΒ \\ Ζ \text{ μέσο } ΑΓ \end{matrix}\right\} \Rightarrow ΕΖ = \frac{ΒΓ}{2}$. Άρα τελικά είναι $ΔΜ = \frac{ΕΖ}{2} = \frac{\frac{ΒΓ}{2}}{2} = \frac{ΒΓ}{4}$.

3. **Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{Α} = 90^0\right)$ φέρουμε το ύψος του ΑΔ.**

Αν $\hat{Β} = 15^0$, τότε να αποδείξετε ότι $ΑΔ = \frac{ΒΓ}{4}$.



Λυση

Στη Γεωμετρία ως τώρα, το μοναδικό θεώρημα που στις υποθέσεις παρουσιάζει γωνίες σε μοίρες είναι αυτό που αναφέρεται σε ορθογώνιο τρίγωνο με μία γωνία του ίση με 30° .
Οπότε, όταν έχουμε πολλαπλάσια ή υποπολλαπλάσια των 30° (π.χ. γωνίες 120°, 150°, 15°) προσπαθούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα αυτό βρίσκοντας ή κατασκευάζοντας το ορθογώνιο τρίγωνο με τις 30° ως γωνία.

Αν φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ, έχουμε ότι στο ορθογώνιο ΑΒΓ ισχύουν:
$ΑΜ = ΒΜ = ΜΓ = \frac{ΒΓ}{2}$, $Β\hat{Α}Μ = \hat{Β} = 15^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΜΔ η γωνία $\hat{Μ}$ ως εξωτερική του τριγώνου ΑΜΒ θα είναι $\hat{Μ} = \hat{Β} + Β\hat{Α}Μ = 30^\circ$.
Οπότε, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΜΔ θα ισχύει ότι $ΑΔ = \frac{ΑΜ}{2}$.

Συνδυάζοντας τα συμπεράσματά μας από την εφαρμογή των θεωρημάτων

έχουμε τελικά ότι: $ΑΔ = \frac{ΑΜ}{2} = \frac{\frac{ΒΓ}{2}}{2} = \frac{ΒΓ}{4}$.

4. **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Φέρουμε τη διχοτόμο ΒΔ της γωνίας $\hat{B}$. Από το μέσο Μ της ΑΓ φέρουμε παράλληλη προς τη διχοτόμο που τέμνει την ΒΓ στο σημείο Κ.**

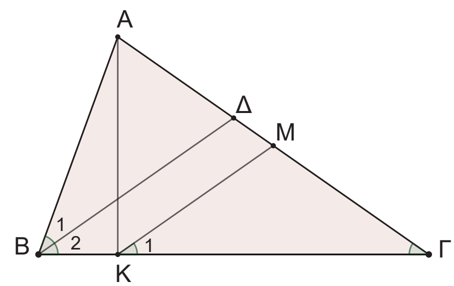
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΜΓ είναι ισοσκελές.

γ) Να αποδείξετε ότι $AK \perp B\Gamma$.

Λυση

Τα δύο πρώτα ερωτήματα είναι επαναλήψεις όσων έχουμε ήδη αναφέρει.



α) Παρατηρούμε ότι $\left.\begin{array}{l}\hat{B} = 2\hat{\Gamma} \\ \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \dfrac{\hat{B}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{\Gamma}$, άρα το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές, αφού έχει δύο γωνίες ίσες.

β) Επίσης, επειδή $B\Delta \parallel KM$ θα είναι και $\hat{K}_1 = \hat{B}_2$ ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των $B\Delta \parallel KM$ που τέμνονται από την $B\Gamma$.

Οπότε θα είναι και $\hat{K}_1 = \hat{\Gamma}$, άρα το τρίγωνο ΚΜΓ είναι ισοσκελές, αφού έχει δύο γωνίες ίσες.

Στο 3ο ερώτημα πρέπει να δώσουμε μεγαλύτερη προσοχή. Εδώ θα εφαρμόσουμε ένα νέο θεώρημα που μάθαμε.
Γενικά, για να δείξουμε ότι δύο ευθείες είναι κάθετες ή δείχνουμε ότι η γωνία που σχηματίζουν είναι $90°$ ή ότι σχηματίζεται ορθογώνιο τρίγωνο. Θυμηθείτε το θεώρημα που λέει: αν σε ένα τρίγωνο μία διάμεσός του είναι ίση με το μισό της πλευράς που αντιστοιχεί, τότε αυτό είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

γ) Παρατηρείστε το τρίγωνο ΑΚΓ. Τι γνωρίζουμε;

Η ΚΜ είναι διάμεσος, ΚΜ = ΜΓ από το ισοσκελές και ΜΓ = ΑΜ αφού Μ μέσο της ΑΓ.

Επομένως, για τη διάμεσο ΚΜ ισχύει ότι $KM = \dfrac{A\Gamma}{2}$, άρα το τρίγωνο ΑΚΓ είναι ορθογώνιο στην κορυφή Κ, δηλαδή $AK \perp B\Gamma$.

Ασκήσεις και Προβλήματα

1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε το ύψος ΑΔ και τα μέσα Μ,Ν των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Αν η περίμετρος του τριγώνου ΜΝΔ είναι 5cm, να υπολογίσετε την περίμετρο του ΑΒΓ, δικαιολογώντας τις σκέψεις σας.

2. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία Γ είναι $30°$. Αν ΑΔ ύψος και η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΔ είναι 5 cm, να υπολογίσετε την περίμετρο του ΑΒΓ, δικαιολογώντας τις σκέψεις σας.

3. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) φέρουμε τα ύψη ΑΔ και ΒΕ.

α) Αν Μ μέσο της ΑΒ να αποδείξετε ΔΜ = ΜΕ.

β) Αν επιπλέον Ζ και Η τα μέσα των τμημάτων ΔΜ και ΜΕ αντίστοιχα και ΔΜ = 6 cm, ΖΗ = 2 cm, να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ.

4. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 30^0$ η κάθετος στο μέσο Μ της υποτείνουσας ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΜΔ = ΑΔ.

β) $M\Delta = \dfrac{AB}{3}$.

5. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε,Ζ τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Φέρουμε ΑΜ και ΓΚ κάθετα στη διαγώνιο ΔΒ. Να αποδείξετε ότι $EM \perp KZ$.

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma} < 90^0$ και το ύψος του ΑΔ. Προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ = ΒΔ.
Να αποδείξετε ότι η ΔΕ διχοτομεί την πλευρά ΑΓ.

7. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ και το ύψος ΑΗ. Να αποδείξετε ότι $M\hat{A}H = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.

8. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) με $\hat{\Gamma} = 30^o$. Θεωρούμε τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα και το ύψος του ΑΚ.
Αν Θ το σημείο τομής των ΑΖ και ΔΕ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι ορθογώνιο.

β) Ισχύει ότι $A\Theta = \Theta E = \frac{B\Gamma}{4}$.

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{Z}B$.

9. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Κ της πλευράς ΑΓ, ώστε $K\Gamma = 2AK$. Αν Δ σημείο της ΒΓ, ώστε $\Gamma\hat{K}\Delta = 30^o$ και ΔΕ κάθετη στην ΑΒ, να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\Gamma = AK$.

β) το τρίγωνο ΔΚΕ είναι ισόπλευρο.

γ) $AK < K\Delta < B\Delta$.

10. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ($AB > B\Gamma$). Θεωρούμε σημείο Ζ της πλευράς ΑΒ, ώστε $BZ = B\Gamma$ και σημείο Ε της προέκτασης της ΑΔ προς το Δ, ώστε $\Delta E = \Delta\Gamma$. Ν αποδείξετε ότι:

α) η ΓΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{\Gamma}B$,

β) η γωνία $Z\hat{\Gamma}E$ είναι ορθή.

Αν Κ το σημείο τομής της ΖΓ με την ΑΔ, δείξτε ότι:

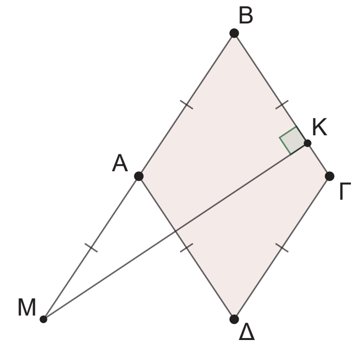
γ) η ΓΔ είναι διάμεσος στο τρίγωνο ΚΓΕ και ότι $AK = AZ = AB = B\Gamma$.

11. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ. Στην προέκταση της ΒΑ προς το Α θεωρούμε σημείο Μ ώστε ΑΜ = ΑΒ. Από το Μ φέρουμε την ΜΚ κάθετη στην ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΚΔ είναι ισοσκελές,

β) η ΚΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{K}\Gamma$,

γ) ισχύει $A\hat{K}\Delta = 90^o - \frac{\hat{B}}{2}$.



12. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90^o$) στο οποίο η διχοτόμος ΓΔ τέμνει κάθετα τη διάμεσο ΑΜ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) η γωνία $\hat{B}$ είναι 30^o,

β) η ΔΜ είναι κάθετη στην ΒΓ,

γ) $2A\Delta = B\Delta$.

13. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} > 90^o$). Έξω από αυτό κατασκευάζουμε τα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα ΑΔΓ και ΑΒΕ ($A\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{E}A = 90^o$).
Θεωρούμε τα μέσα Μ, Κ, Ν των πλευρών ΒΓ,ΑΓ,ΑΒ αντίστοιχα του τριγώνου ΑΒΓ.
Να αποδείξετε ότι:

α) $MK = EN$,

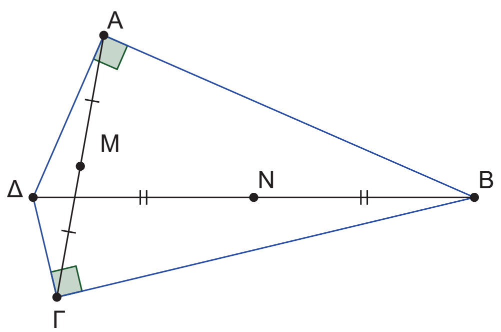
β) $M\hat{K}\Delta = 90^o + \hat{B} + \hat{\Gamma}$,

γ) $M\Delta = EM$.

δ) Το τρίγωνο ΕΜΔ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

14. Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε την ημιευθεία Βx προέκταση της ΓΒ προς το Β. Από το Α φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΑΚ και ΑΛ στις διχοτόμους των γωνιών $A\hat{B}\Gamma$ και $A\hat{B}x$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το ΑΚΒΛ είναι ορθογώνιο με τη διαγώνιο του ΛΚ να διέρχεται από τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του ΑΒΓ.

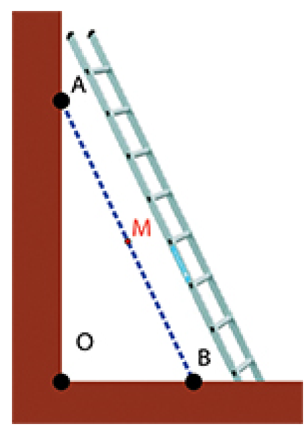
15. Δίνεται τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ με $\hat{Α} = \hat{Γ} = 90°$. Θεωρούμε τα μέσα $Μ$ και $Ν$ των διαγωνίων του $ΑΓ$ και $ΔΒ$ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:
α) Η $ΜΝ$ είναι κάθετη της $ΑΓ$.
β) Αν $Κ$ και $Λ$ τα μέσα των $ΑΒ$ και $ΔΓ$ αντίστοιχα, τότε τα τμήματα $ΚΛ$ και $ΜΝ$ διχοτομούνται.



16. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $\hat{Γ} = 45°$. Φέρουμε τα ύψη $ΑΔ$ και $ΒΕ$ και θεωρούμε το μέσο $Κ$ της πλευράς $ΑΒ$.
Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΕΚΔ$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

17. Σε οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ φέρουμε τα ύψη $ΒΔ$ και $ΓΕ$ που τέμνονται στο σημείο Η.
Αν $Μ$ μέσο του $ΒΓ$ και $Κ$ μέσο του $ΑΗ$, να αποδείξετε ότι η $ΜΚ$ είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος $ΕΔ$.

18. Κάποια μέρα είχα φέρει μια σκάλα 3 μέτρων για να κάνω κάποιες δουλειές στο σπίτι. Στο μεσαίο σκαλοπάτι άφησα τα εργαλεία και ήμουν έτοιμος να ανέβω στη σκάλα, όταν διαπίστωσα ότι το κάτω μέρος της σκάλας άρχισε να γλιστρά. Παρατηρώντας θέλοντας και μη την όλη σκηνή, συνειδητοποίησα ότι το σημείο Μ, εκεί που είχα αφήσει τα εργαλεία στο μέσο της σκάλας έκανε μια πολύ περίεργη – κανονική τροχιά. Ακόμα και τώρα που το σκέφτομαι με εκπλήσσει.



Ποιος πιστεύετε ότι είναι ο γεωμετρικός τόπος των διαδοχικών θέσεων του σημείου Μ, καθώς το σημείο Β κινείται στο επίπεδο;
Άνοιξε το αρχείο GeoGebra. Δείτε την ιδιαίτερη κίνηση του σημείου Μ. Ανακάλυψε κρυμμένες σχέσεις. Ποια είναι η κοινή ιδιότητα όλων των σημείων Μ. Σε ποια καμπύλη κινούνται;

5.3
Βασικά σημεία στο τρίγωνο

Τι καινούργιο υπάρχει στην ενότητα

Στις παρακάτω σελίδες θα μάθουμε για το σημείο τομής:
- των διχοτόμων των γωνιών ενός τριγώνου και για τον εγγεγραμμένο κύκλο,
- των μεσοκαθέτων των πλευρών ενός τριγώνου και για τον περιγεγραμμένο κύκλο,
- των υψών και των διαμέσων ενός τριγώνου.

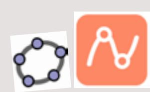
Α. Διχοτόμοι γωνιών τριγώνου

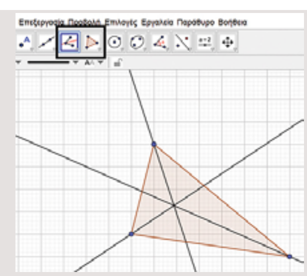
Απαραίτητες γνώσεις

Γνωρίζουμε ότι διχοτόμος γωνίας είναι η ημιευθεία που χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες. Επίσης, γνωρίζουμε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας. Αλλά ισχύει και το αντίστροφο, αν ένα σημείο ισαπέχει από τις πλευρές μιας γωνίας, τότε αυτό είναι σημείο της διχοτόμου.

Δραστηριότητα

Ανοίξτε την εφαρμογή GeoGebra.
Με το εργαλείο «πολύγωνο» κατασκευάστε ένα τρίγωνο.
Με το εργαλείο «διχοτόμος γωνίας» κατασκευάστε τις τρεις διχοτόμους του τριγώνου.
Μετακινήστε μία οποιαδήποτε κορυφή του τριγώνου.
Τι παρατηρείτε σε σχέση με τις διχοτόμους του τριγώνου;



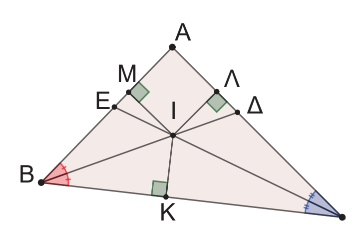


Ας δούμε τι έχει προκύψει

Παρατηρήσαμε ότι όπως και να μετακινήσουμε το τρίγωνο που κατασκευάσαμε, οι τρεις διχοτόμοι πάντα διέρχονται από το ίδιο σημείο. Γιατί, όμως, να συμβαίνει αυτό;

ΘΕΩΡΗΜΑ

Οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο λέγεται έγκεντρο. (Σχ.14)



Σχήμα 14

Αποδειξη

Ας υποθέσουμε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο Ι.
Θέλουμε να αποδείξουμε ότι το Ι θα ανήκει και στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$. Οπότε αρκεί να ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας $\hat{A}$.
Φέρουμε τις αποστάσεις ΙΚ, ΙΛ, ΙΜ του Ι από τις πλευρές του τριγώνου.

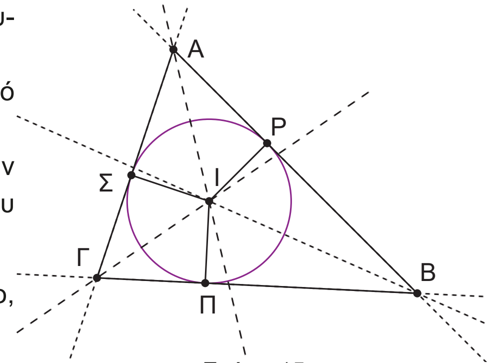
Το Ι ανήκει στη διχοτόμο της $\hat{B}$, επομένως ισαπέχει από τις πλευρές της δηλαδή $IK = IM$ (1).

Το Ι ανήκει στη διχοτόμο της $\hat{\Gamma}$, συνεπώς ισαπέχει από τις πλευρές της δηλαδή $IK = I\Lambda$ (2).

Από (1) και (2) έχουμε $ΙΛ = ΙΜ$, οπότε το Ι ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας $\hat{Α}$.

Άρα οι τρεις διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο. ■

Το σημείο στο οποίο **συντρέχουν** οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου έχει την ιδιότητα να ισαπέχει των πλευρών του τριγώνου. (Σχ.15)



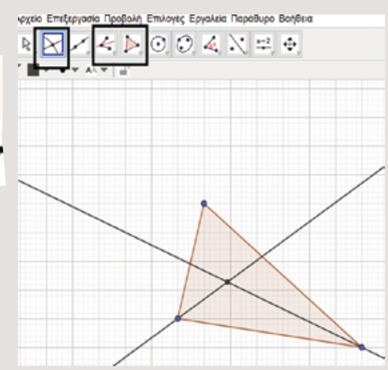
Σχήμα 15

Οπότε, αν με κέντρο το Ι και ακτίνα $ΙΠ = ΙΡ = ΙΣ$ γράψουμε κύκλο, αυτός θα **εφάπτεται** των πλευρών του τριγώνου.

Τον κύκλο αυτόν τον ονομάζουμε **εγγεγραμμένο στο τρίγωνο κύκλο** και το σημείο τομής των διχοτόμων θα το ονομάσουμε **έγκεντρο**, το κέντρο δηλαδή του εγγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου.

Δραστηριότητα κατανόησης

Ανοίξτε την εφαρμογή GeoGebra.
Με το εργαλείο «πολύγωνο» κατασκευάστε ένα τρίγωνο.
Με το εργαλείο «διχοτόμος γωνίας» κατασκευάστε τις τρεις διχοτόμους του τριγώνου.
Με το εργαλείο «τομή» βρείτε το έγκεντρο του τριγώνου.
Προσπαθήστε να κατασκευάσετε τον εγγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου.
Μετακινήστε μία οποιαδήποτε κορυφή.
Ελέγξτε την κατασκευή σας.



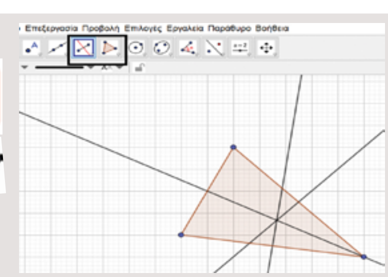
Β. Μεσοκάθετοι πλευρών τριγώνου

Απαραίτητες γνώσεις

Γνωρίζουμε ότι μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι η ευθεία που είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα στο μέσο του. Επίσης, γνωρίζουμε ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος. Αλλά ισχύει και το αντίστροφο, αν ένα σημείο ισαπέχει από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος, τότε αυτό ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος.

Δραστηριότητα

Ανοίξτε την εφαρμογή GeoGebra.
Με το εργαλείο «πολύγωνο» κατασκευάστε τρίγωνο.
Με το εργαλείο «μεσοκάθετος» κατασκευάστε τις μεσοκαθέτους των πλευρών του τριγώνου.
Μετακινήστε οποιαδήποτε κορυφή του τριγώνου.
Τι παρατηρείτε;

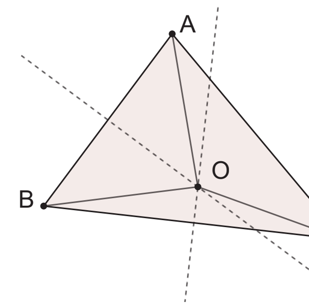


Ας δούμε τι έχει προκύψει

Παρατηρήσαμε ότι, όπως και να μετακινήσουμε το τρίγωνο που κατασκευάσαμε, οι τρεις μεσοκάθετοι πάντα διέρχονται από το ίδιο σημείο. Γιατί, όμως, να συμβαίνει αυτό;

ΘΕΩΡΗΜΑ

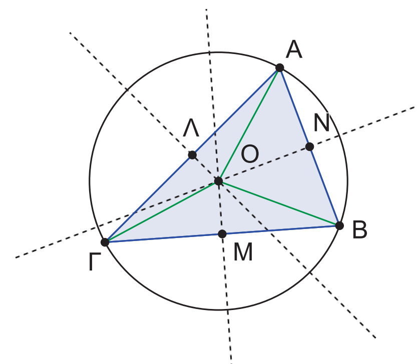
Οι μεσοκάθετοι των πλευρών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο που λέγεται περίκεντρο. (Σχ.16)



Σχήμα 16

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι οι μεσοκάθετοι των πλευρών ΑΒ και ΒΓ τέμνονται στο σημείο Ο.
Θα αποδείξουμε ότι το Ο είναι σημείο και της μεσοκαθέτου της ΑΓ, δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι ΟΑ = ΟΓ.
Επειδή το Ο ανήκει στη μεσοκάθετο του ΒΓ θα είναι ΟΒ = ΟΓ (1)
Επειδή το Ο ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ θα είναι ΟΑ = ΟΒ (2)
Από (1) και (2) έχουμε ότι ΟΑ = ΟΓ.
Άρα οι τρεις μεσοκάθετοι των πλευρών του τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο. ■
Το σημείο αυτό έχει την ιδιότητα να ισαπέχει από τις τρεις κορυφές του τριγώνου. (Σχ.17)
Οπότε, αν με κέντρο το σημείο αυτό και ακτίνα τις ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ γράψουμε κύκλο, αυτός θα διέρχεται από τις τρεις κορυφές του τριγώνου και λέγεται **περιγεγραμμένος** κύκλος του τριγώνου. Το σημείο Ο θα το λέμε **περίκεντρο**.



Σχήμα 17

Δραστηριότητα κατανόησης

Ανοίξτε την εφαρμογή GeoGebra.
Με το εργαλείο «πολύγωνο» κατασκευάστε τρίγωνο.
Με το εργαλείο «μεσοκάθετος» κατασκευάστε τις τρεις μεσοκαθέτους του τριγώνου.
Με το εργαλείο «τομή» βρείτε το περίκεντρο.
Με το εργαλείο «κύκλος με κέντρο που διέρχεται από ένα σημείο» κατασκευάστε τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου.
Κινήστε οποιαδήποτε κορυφή του τριγώνου.
Από τρία σημεία διέρχεται πάντα ένας κύκλος;

Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

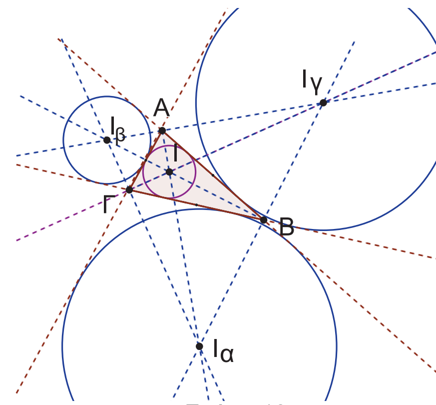
Δραστηριότητα κατανόησης

Ανοίξτε την εφαρμογή GeoGebra.
Κατασκευάστε ένα τρίγωνο ΑΒΓ.
Κατασκευάστε τις διχοτόμους και τις μεσοκαθέτους.
Βρείτε το περίκεντρο Ο του τριγώνου και κατασκευάστε τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου.
Βρείτε το έγκεντρο Ι του τριγώνου και κατασκευάστε τον εγγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου.
Μετακινήστε μία οποιαδήποτε κορυφή του τριγώνου ώστε:

1. Το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι αμβλυγώνιο. Τι παρατηρείτε σχετικά με το έγκεντρο και το περίκεντρο;
2. Τα σημεία Ο, Ι και Α να είναι στην ίδια ευθεία (συνευθειακά). Τι είδους τρίγωνο είναι το ΑΒΓ; Αποδείξτε την εικασία σας.
3. Το έγκεντρο και το περίκεντρο να συμπέσουν. Τι είδους τρίγωνο είναι το ΑΒΓ; Αποδείξτε την εικασία σας.

Αποδεικνύεται ότι αν φέρουμε τις διχοτόμους για παράδειγμα της γωνίας $\hat{A}$ και τις διχοτόμους των εξωτερικών γωνιών $\hat{B}_{εξ}$ και $\hat{Γ}_{εξ}$, αυτές διέρχονται από το ίδιο σημείο που λέγεται **παράκεντρο** του τριγώνου. Υπάρχουν τρία παράκεντρα. Με κέντρα τα σημεία αυτά μπορούμε να γράψουμε κύκλους που εφάπτονται των φορέων των πλευρών του τριγώνου (όπως στο σχήμα). Οι κύκλοι αυτοί λέγονται παρεγγεγραμμένοι κύκλοι του τριγώνου. (Σχ.18)

Ανοίξτε την εφαρμογή GeoGebra, κινήστε μια οποιαδήποτε κορυφή του τριγώνου και παρατηρείστε τη σχετική θέση των κύκλων.



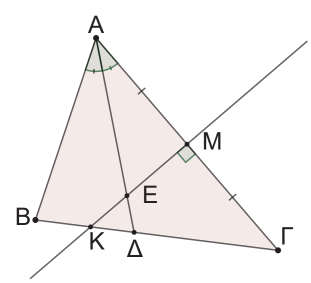
Σχήμα 18

Ερωτήσεις Συμπλήρωσης και Σωστού - Λάθους

1. Να συμπληρώσετε κατάλληλα την παρακάτω πρόταση:
Οι .... των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο λέγεται έγκεντρο. Το έγκεντρο έχει την ιδιότητα να ισαπέχει των .... του τριγώνου και είναι το κέντρο του .... στο τρίγωνο κύκλου.

2. Να συμπληρώσετε κατάλληλα την παρακάτω πρόταση:
Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος ονομάζουμε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου που ....
Οι .... των πλευρών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο λέγεται περίκεντρο. Το περίκεντρο έχει την ιδιότητα να ισαπέχει των .... του τριγώνου και είναι το κέντρο του .... στο τρίγωνο κύκλου.

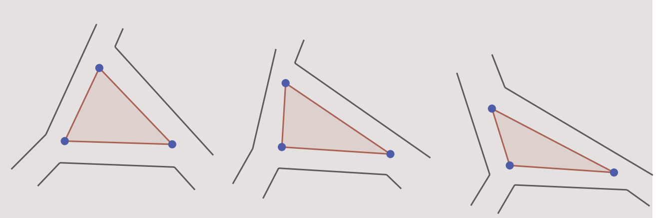
3. Στο διπλανό οξυγώνιο τρίγωνο έχουμε φέρει την μεσοκάθετο ΚΜ του ΑΓ και τη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας Α.
Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι Σωστές και ποιες Λάθος:
α) το Δ ισαπέχει των Β και Μ,
β) το Κ ισαπέχει των Α και Γ,
γ) το Ε ισαπέχει των ΑΒ και ΑΓ αλλά και των σημείων Α και Γ,
δ) το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ είναι σημείο της ΑΔ,
ε) το έγκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ είναι σημείο της ΑΔ.



Δραστηριότητα

Ο φωτισμός του πάρκου

Ο Δήμος θέλει να διαμορφώσει μία πυκνόκατοικημένη περιοχή κατασκευάζοντας μία τριγωνική πλατεία. Τα προτεινόμενα σχέδια είναι τα διπλανά.
Πρόκειται για τρία διαφορετικά σχέδια πλατείας με τους γύρω δρόμους που το τριγωνικό σχήμα μπορεί να είναι οξυγώνιο ή ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο τρίγωνο.

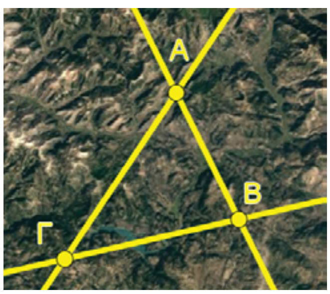


Ποιο από τα παραπάνω σχέδια θα προτιμήσετε παίρνοντας υπόψιν σας ότι τον φωτισμό της πλατείας θα πρέπει να τον πετύχουμε:

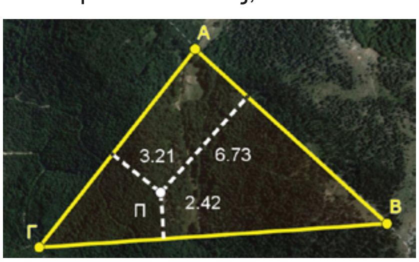
α) με έναν μόνο φανοστάτη,
β) με την μικρότερη φωτορύπανση στους γύρω κατοικήσιμους χώρους,
γ) και με την εξασφάλιση όσο το δυνατόν μεγαλύτερου ελεύθερου χώρου στην πλατεία.
Υπάρχει μία μοναδική λύση στο συγκεκριμένο πρόβλημα;

Ασκήσεις και προβλήματα

1. Θέλουμε να τοποθετήσουμε κεραία κινητής τηλεφωνίας στο εσωτερικό της τριγωνικής περιοχής ΑΒΓ, ώστε το σήμα να καλύπτει ολόκληρη την περιοχή. Ποια είναι η ζητούμενη θέση;



2. Σε μία δασική περιοχή ΑΒΓ υπάρχουν τρεις αντιπυρικές ζώνες ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ. Σε ποιο σημείο πρέπει να σταθμεύσει ένα πυροσβεστικό όχημα, ώστε σε περίπτωση ανάγκης να έχει να διανύσει την ίδια απόσταση προκειμένου να βρεθεί σε μία από αυτές;



3. Από το έγκεντρο Ι, τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ευθεία παράλληλη στη ΒΓ που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\Delta E = B\Delta + \Gamma E$.

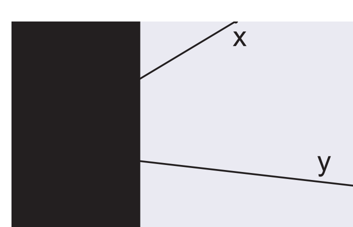
4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ $(AB < A\Gamma)$. Προεκτείνουμε την ΑΒ προς το Β κατά τμήμα $B\Delta = AB$ και την ΑΓ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma E = A\Gamma$. Φέρουμε τις καθέτους στις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Β και Γ που τέμνονται στο Ι.
α) Δείξτε ότι το τρίγωνο ΔΙΕ είναι ισοσκελές,
β) Να βρείτε το περίκεντρο του τριγώνου ΑΔΕ.

5. Από το έγκεντρο Ι τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε κάθετες ΙΔ, ΙΕ, ΙΖ στις πλευρές του. Να αποδείξετε ότι το σημείο Ι είναι το περίκεντρο του τριγώνου ΔΕΖ.

6. Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\hat{B} = \hat{\Delta} = 90^\circ$. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ και ΑΔ κατά ευθύγραμμα τμήματα $BE = AB$ και $\Delta Z = A\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετος του ΕΖ διέρχεται από την κορυφή Γ.

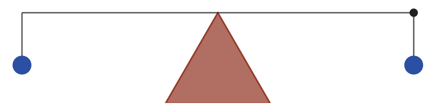
7. Σε τρίγωνο ΑΒΓ (με ΒΓ > ΑΓ) έχουμε φέρει τις διχοτόμους των γωνιών Α και Β που τέμνονται στο σημείο Ι. Στην προέκταση της ΓΑ (προς το Α) θεωρούμε σημείο Ε ώστε $\Gamma E = \Gamma B$ και στην πλευρά ΑΒ σημείο Δ ώστε $B\Delta = EA$. Να αποδείξετε ότι:
α) η ΓΙ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$,
β) ΙΕ = ΙΒ,
γ) το τρίγωνο ΙΔΑ είναι ισοσκελές.

8. **Ο απρόσεκτος καθηγητής**
Κάποια στιγμή ο καθηγητής κος Αφηρημένος γυρισμένος προς την τάξη σχεδίασε μια γωνία λέγοντας συγχρόνως: «Δίνεται η γωνία $x\hat{O}y$ …». Γυρνώντας στον πίνακα διαπίστωσε ότι η κορυφή της γωνίας ήταν εκτός του πίνακα σχεδίασης, μοιραία ακούστηκαν και τα πρώτα γέλια. Συνεχίζοντας, όμως, διατύπωσε την ερώτηση: «Να κατασκευάσετε τη διχοτόμο της γωνίας, εδώ σας θέλω καμάρια μου!» Πώς είναι δυνατόν να γίνει μια τέτοια κατασκευή;

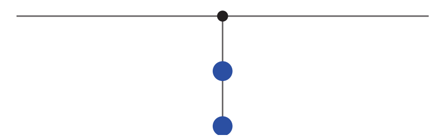


Γ. Βαρύκεντρο τριγώνου

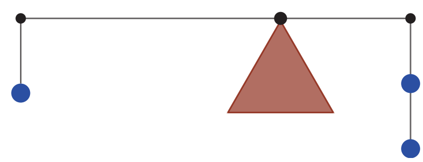
Για τον μεγάλο μαθηματικό της αρχαιότητας, **Αρχιμήδη** έχουμε αναφερθεί και στα προηγούμενα. Μόνο που τώρα ξεπέρασε τον εαυτό του. Χρησιμοποίησε απλές αρχές μηχανικής για να κάνει Γεωμετρία!



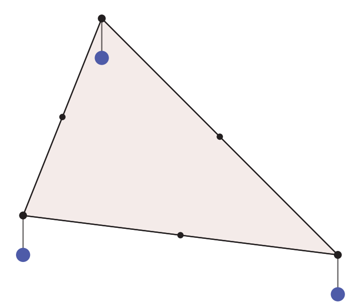
Γνώριζε ότι όταν έχουμε ένα σύστημα μιας ράβδου και δύο ίσων βαρών στα άκρα της, το σημείο ισορροπίας της είναι το μέσο της ράβδου. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα αυτό μπορεί να αντικατασταθεί με ένα άλλο, που θα αποτελείται από τη ράβδο και δύο βάρη, τα οποία θα τα κρεμάσουμε στη μέση.



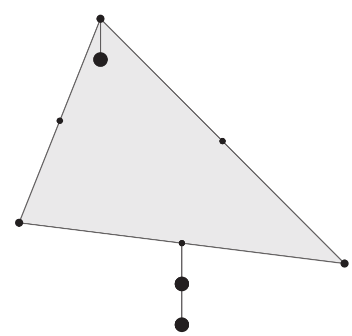
Με πειράματα βρήκε ότι αν είχε ένα σύστημα ράβδου με ένα βάρος στο ένα άκρο και δύο ίδια βάρη στο άλλο, τότε το σημείο ισορροπίας θα είναι ένα σημείο σαν αυτό στη διπλανή εικόνα. Ένα σημείο που χωρίζει τη ράβδο σε δύο τμήματα, το ένα διπλάσιο από το άλλο. Αλλά πιο κοντά στο άκρο με τα δύο βάρη.



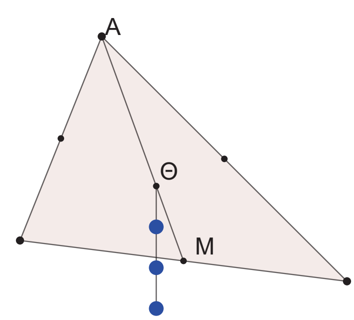
Με τις αρχές αυτές μπορούσε να βρει το σημείο ισορροπίας οποιουδήποτε γεωμετρικού σχήματος. Για παράδειγμα, για το τρίγωνο θεωρούσε στην αρχή τρία ίσα βάρη να κρέμονται από τις τρεις κορυφές. Μετά εφάρμοζε τα προηγούμενα.



Στην αρχή αντικαθιστούσε τα δύο βάρη με δύο στο μέσο της μιας πλευράς.



Μετά αντικαθιστούσε τα βάρη με τρία που τα κρεμούσε από ένα σημείο που χωρίζει τη διάμεσο του τριγώνου σε λόγο $\frac{2}{1}$.

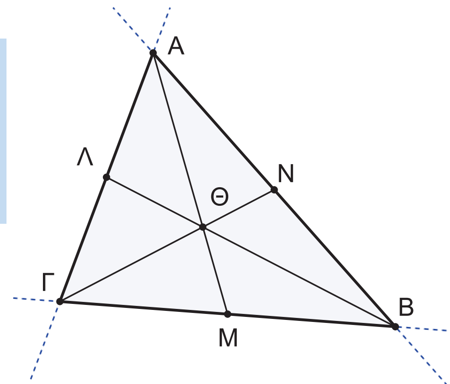


Το σημείο αυτό το ονόμαζε **κέντρο βάρους** του τριγώνου.

Με τη μηχανική αυτή μέθοδο ουσιαστικά διατύπωσε το θεώρημα που θα μας απασχολήσει.

ΘΕΩΡΗΜΑ

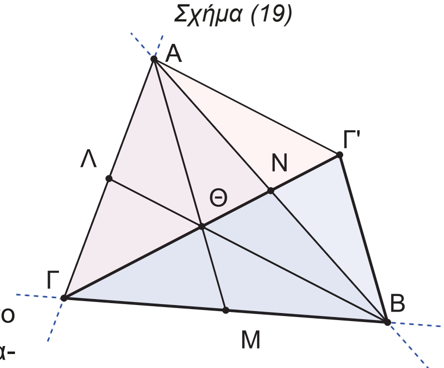
Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο λέγεται **βαρύκεντρο** ή **κέντρο βάρους** (Σχ. 19).
Το σημείο αυτό έχει την ιδιότητα να απέχει από την κάθε κορυφή απόσταση ίση με τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου



Σχήμα (19)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι οι διάμεσοι AM και $B\Lambda$ τέμνονται στο Θ, θα δείξουμε ότι η $\Gamma\Theta$ είναι διάμεσος.
Ονομάζουμε N το σημείο τομής της $\Gamma\Theta$ με την AB.
Θεωρούμε σημείο Γ' τέτοιο ώστε $\Theta\Gamma' = \Theta\Gamma$, (Σχ. 20) τότε:



Σχήμα (20)

Στο τρίγωνο $\Gamma\Gamma'B$ ισχύει: $\left.\begin{array}{l}\Theta \text{ μέσο } \Gamma\Gamma' \\ M \text{ μέσο } B\Gamma\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll}\Theta M \parallel \Gamma' B & (1) \\ \Theta M = \dfrac{\Gamma' B}{2} & (2)\end{array}\right.$

Στο τρίγωνο $A\Gamma\Gamma'$ ισχύει: $\left.\begin{array}{l}\Lambda \text{ μέσο } A\Gamma \\ \Theta \text{ μέσο } \Gamma\Gamma'\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll}\Lambda\Theta \parallel A\Gamma' & (3) \\ \Lambda\Theta = \dfrac{A\Gamma'}{2} & (4)\end{array}\right.$

Από (1) και (3) καταλήγουμε στο ότι $A\Theta \parallel \Gamma'B$ και $\Theta B \parallel A\Gamma'$, οπότε το $A\Gamma'B\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο (έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες). Επομένως, οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.
Άρα το Ν είναι το μέσο της ΑΒ, και η ΓΘ είναι διάμεσος στο τρίγωνο ΑΒΓ.
Επίσης, καταλήγουμε και στο ότι $\Theta N = \frac{\Theta\Gamma'}{2} = \frac{\Gamma\Theta}{2}$, δηλαδή $\Gamma\Theta = 2\Theta N$.

Άρα $\frac{\Gamma\Theta}{\Gamma N} = \frac{\Gamma\Theta}{\Gamma\Theta + \Theta N} = \frac{2\Theta N}{2\Theta N + \Theta N} = \frac{2\Theta N}{3\Theta N} = \frac{2}{3}$.

Επομένως ,το σημείο τομής των διαμέσων Θ χωρίζει τη διάμεσο ΓΝ σε δύο τμήματα με λόγο $\frac{2}{1}$, ή απέχει από την κορυφή Γ απόσταση ίση με τα $\frac{2}{3}$ της διαμέσου ΓΝ.
Η ιδιότητα αυτή (αποδεικνύεται παρόμοια) ισχύει για όλες τις διαμέσους. ■

Δ. Ορθόκεντρο τριγώνου

Με το τελευταίο θεώρημα που θα αναφέρουμε, θα αποδείξουμε ότι τα ύψη ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο το λέμε **ορθόκεντρο**.

Δραστηριότητα

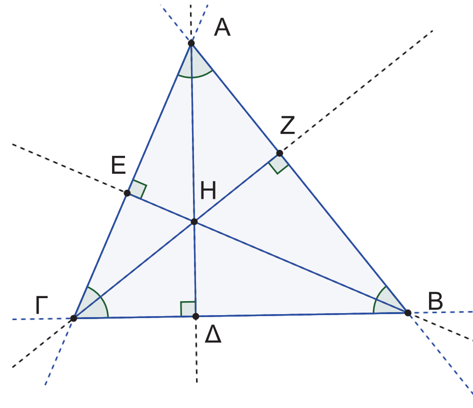
Ανοίξτε την εφαρμογή GeoGebra.
Σχεδιάστε ένα τρίγωνο και φέρτε τα τρία ύψη του.
Μετακινήστε οποιαδήποτε κορυφή του τριγώνου, τι παρατηρείτε;
Μετακινήστε μία οποιαδήποτε κορυφή, ώστε το ορθόκεντρο να είναι:
Εσωτερικό σημείο του τριγώνου, ποιο το είδος του τριγώνου στην περίπτωση αυτή;
Κορυφή του τριγώνου, ποιο το είδος του τριγώνου στην περίπτωση αυτή;
Εξωτερικό σημείο του τριγώνου, ποιο το είδος του τριγώνου στην περίπτωση αυτή;

Ας δούμε τι έχει προκύψει

Παρατηρήσαμε ότι, όπως και να μετακινήσουμε το τρίγωνο που κατασκευάσαμε, τα τρία ύψη πάντα διέρχονται από το ίδιο σημείο. Γιατί, όμως, να συμβαίνει αυτό;
Όπως παρατηρήσατε στην περίπτωση του αμβλυγωνίου τριγώνου για να φανεί ότι τα τρία ύψη διέρχονται από το ίδιο σημείο πρέπει να προεκτείνουμε τα ύψη.
Για αυτό το λόγο πιο σωστά λέμε ότι:

ΘΕΩΡΗΜΑ

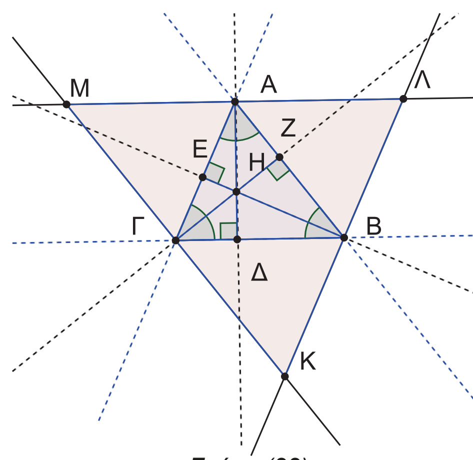
Οι **φορείς** των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο που λέγεται **ορθόκεντρο** (Σχ. 21).



Σχήμα (21)

Αποδειξη

Από την κάθε κορυφή του τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την απέναντι πλευρά. Με τον τρόπο αυτό σχηματίζεται το τρίγωνο ΜΛΚ (Σχ. 22).
Παρατηρείστε πόσα παραλληλόγραμμα εμφανίζονται.
Για παράδειγμα, το ΜΑΒΓ αλλά και το ΓΑΛΒ, αφού έχουν τις απέναντι πλευρές τους παράλληλες από κατασκευή.
Οπότε θα είναι ΜΑ = ΒΓ και ΑΛ = ΒΓ. Άρα ΜΑ = ΛΑ.
Δηλαδή, στο τρίγωνο ΜΛΚ οι κορυφές Α,Β,Γ του αρχικού τριγώνου είναι τα μέσα των πλευρών του. Οπότε τα ύψη του ΑΒΓ θα είναι οι μεσοκάθετοι του ΜΛΚ, για τις οποίες γνωρίζουμε ότι διέρχονται από το ίδιο σημείο. Άρα τα ύψη του τριγώνου ΑΒΓ διέρχονται από το ίδιο σημείο. ■



Σχήμα (22)

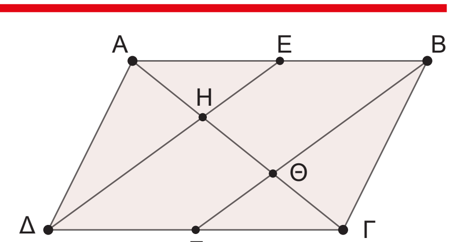
Ας συνοψίσουμε λοιπόν.
Το σημείο τομής των διαμέσων ενός τριγώνου λέγεται **βαρύκεντρο** ή κέντρο βάρους.
Το σημείο τομής των φορέων των υψών ενός τριγώνου λέγεται **ορθόκεντρο**.
Στα προηγούμενα έχουμε αναφέρει ότι:
Το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών ενός τριγώνου λέγεται **έγκεντρο**.
Το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών ενός τριγώνου λέγεται **περίκεντρο**.

Δραστηριότητα κατανόησης

Άνοιξε την εφαρμογή GeoGebra και απάντησε στην ερώτηση που διατυπώνεται με τους περιορισμούς που τίθενται.

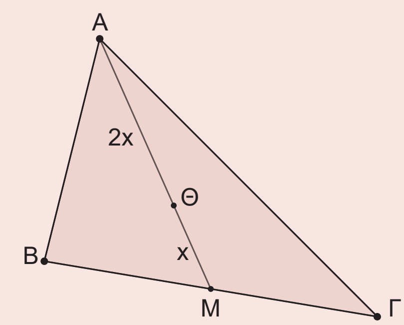
Παραδειγματα

**1. Θεωρούμε Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΒ,ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι οι ΔΕ και ΒΖ χωρίζουν τη διαγώνιο ΑΓ σε τρία ίσα μέρη (τριχοτομούν την ΑΓ).**

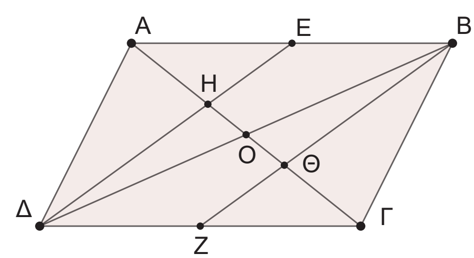


ΛΥΣΗ

Η συγκεκριμένη άσκηση μπορεί να λυθεί και με τις γνώσεις που είχαμε πριν την ενότητα αυτή. Με ισότητα τριγώνων και τα βασικά θεωρήματα που ισχύουν σε κάθε τρίγωνο.

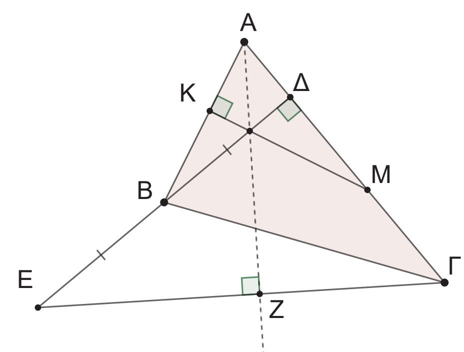


Θα προτιμήσουμε να λύσουμε την άσκηση εφαρμόζοντας τα όσα έχουμε αναφέρει για το κέντρο βάρους ενός τριγώνου.
Θυμίζουμε ότι το κέντρο βάρους είναι το σημείο τομής των διαμέσων.
Πόσες διάμεσοι χρειάζεται να φέρουμε για να βρούμε το κέντρο βάρος ενός τριγώνου;
Τρεις; Για σκεφθείτε καλύτερα!
Δύο; Καλή απάντηση, αλλά μήπως χρειάζεται μόνο μία!
Πράγματι, αν φέρουμε μόνο μία και βρούμε το μοναδικό σημείο της που την χωρίζει σε λόγο 2:1, τότε το σημείο αυτό είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου.



Αν φέρουμε και την άλλη διαγώνιο του παραλληλογράμμου μπορείτε να ανακαλύψετε τα κέντρα βάρους σε τρίγωνα που σχηματίζονται;
Στο ΑΔΒ έχουμε φέρει δύο διαμέσους την ΔΕ αλλά και την ΑΟ (οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται).
Άρα το σημείο Η είναι το κέντρο βάρους του ΑΔΒ.
Όμοια στο ΔΒΓ το σημείο Θ είναι το κέντρο βάρους του.
Αν θέσουμε ΗΟ = x και ΟΘ = y τότε θα ισχύουν ΑΗ = 2x, ΘΓ = 2y. Αλλά ΑΟ = 3x = ΟΓ = 2y άρα x = y.
Οπότε ΑΗ = ΗΘ = ΘΓ, δηλαδή η ΑΓ τριχοτομείται από τις ΔΕ και ΒΖ.

2. **Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε το ύψος του ΒΔ και θεωρούμε το μέσο Μ του τμήματος ΓΔ.**
Προεκτείνουμε τη ΔΒ κατά τμήμα ΒΕ = ΔΒ.
Να αποδείξετε ότι η κάθετη από το Μ στην ΑΒ, η κάθετη από το Α στην ΕΓ και η ΒΔ διέρχονται από το ίδιο σημείο (συντρέχουν).



ΛΥΣΗ

Ας τονίσουμε για άλλη μία φορά τη σημασία του μεγάλου και καθαρού σχήματος.

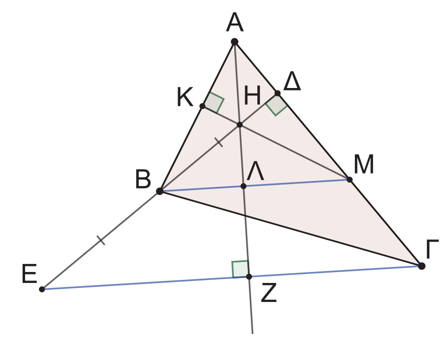
Παρατηρώντας το σχήμα και τις ιδιότητές του καταλαβαίνουμε ότι στην άσκηση αυτή εμφανίζονται κάποια θεωρήματα. Όπως:

Στο τρίγωνο ΑΒΜ έχω φέρει δύο ύψη, τα ΒΔ και ΜΚ.

Στο τρίγωνο ΕΔΓ έχουμε δύο μέσα πλευρών του, το Β μέσο του ΕΔ και το Μ μέσο του ΔΓ.

Αν φέρουμε την ΒΜ, τμήμα που ενώνει τα μέσα των πλευρών στο ΕΔΓ, η άσκηση αρχίζει να λύνεται.

Στο ΕΔΓ έχουμε $\begin{cases} \text{Μ μέσο ΔΓ} \\ \text{Β μέσο ΕΔ} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ΒΜ \parallel ΕΓ \\ ΒΜ = \dfrac{ΕΓ}{2} \end{cases}$



Στο ΑΒΜ έχουμε φέρει τα ύψη ΒΔ και ΜΚ που τέμνονται στο σημείο Η, το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΜ.

Οπότε η ευθεία ΑΗ θα είναι ο φορέας του τρίτου ύψους. Επομένως, $ΑΛ \perp ΒΜ$ και επειδή $ΒΜ \parallel ΕΓ$ η ευθεία ΑΛ προεκτεινόμενη θα τέμνει κάθετα την ΕΓ. Δηλαδή, πρόκειται για την κάθετη που άγεται από το Α προς την ΕΓ. Άρα ΜΚ, ΒΔ και ΑΖ είναι ευθείες που διέρχονται από το ίδιο σημείο (συντρέχουσες), το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΜ.

Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους

1. Το ορθόκεντρο ενός τριγώνου ισαπέχει των πλευρών του.
2. Υπάρχει τρίγωνο που το βαρύκεντρό του ταυτίζεται με μία κορυφή του.
3. Το βαρύκεντρο ενός τριγώνου μπορεί να είναι εξωτερικό σημείο του τριγώνου.
4. Σε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε Κ, Λ και Μ τα μέσα των πλευρών του. Τότε το περίκεντρο του ΑΒΓ είναι το ορθόκεντρο του ΜΛΚ.
5. Στο ισόπλευρο τρίγωνο η ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου είναι διπλάσια από την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου.
6. Υπάρχει τρίγωνο που έχει το περίκεντρο του πάνω σε μία πλευρά του.
7. Το έγκεντρο ενός τριγώνου μπορεί να είναι εξωτερικό σημείο του τρίγωνο.
8. Υπάρχει τρίγωνο που όλα τα κέντρα του ταυτίζονται.
9. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο το περίκεντρο το ορθόκεντρο και το έγκεντρο είναι συνευθειακά.
10. Αν το ορθόκεντρο ενός τριγώνου βρίσκεται σε μία κορυφή του, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

Ασκήσεις

1. Αν Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΔΓ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι ΑΖ και ΑΕ χωρίζουν τη διαγώνιο ΒΔ σε τρία ίσα τμήματα (**τριχοτομούν**).

2. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, προεκτείνουμε την ΑΒ (προς το Β) κατά τμήμα $ΒΕ = ΑΒ$. Αν η ΔΕ τέμνει την ΑΓ στο Η και την ΒΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι:

   α) $ΒΖ = ΖΓ$ και **β)** $ΓΗ = \dfrac{ΑΗ}{2}$.

3. Σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ θεωρούμε το βαρύκεντρο Κ του τριγώνου ΑΒΓ και τα μέσα Ε, Ζ και Η των ΑΒ, ΓΔ και ΚΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $ΕΗ \parallel ΚΖ$.

4. Από ένα σημείο Ε της διαγωνίου ΒΔ τετραγώνου ΑΒΓΔ φέρουμε κάθετη στην πλευρά ΑΒ και από το Β την κάθετη στην ευθεία ΑΕ. Να αποδείξετε ότι αυτές οι δύο κάθετες τέμνονται σε σημείο της διαγωνίου ΑΓ.

5. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\hat{Β} = \hat{Δ} = 90^\circ$. Αν Ε είναι το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΑΒ, ΓΔ και Ζ το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΑΔ και ΒΓ, να αποδείξετε ότι η κάθετη από το Α στην ΕΖ διέρχεται από το Γ.

6. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τις διαμέσους ΑΜ,ΒΛ. Στις προεκτάσεις τους παίρνουμε τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα ώστε ΜΔ = ΜΑ και ΕΛ = ΒΛ Να αποδείξετε ότι:

α) $ΓΕ = ΓΔ$,

β) $ΚΓ = \frac{1}{3} \cdot ΒΓ$ όπου Κ το σημείο τομής της ΔΛ με την ΒΓ.

7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ,Ε,Ζ των πλευρών του ΑΒ,ΒΓ,ΓΑ αντίστοιχα

α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΖΔ,ΑΕ διχοτομούνται.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΔΖΕ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν το ίδιο κέντρο βάρους.

8. Αν Η το ορθόκεντρο τριγώνου ΑΒΓ με $\hat{Β} - \hat{Γ} = 90^\circ$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΗΒΓ είναι ίσα.

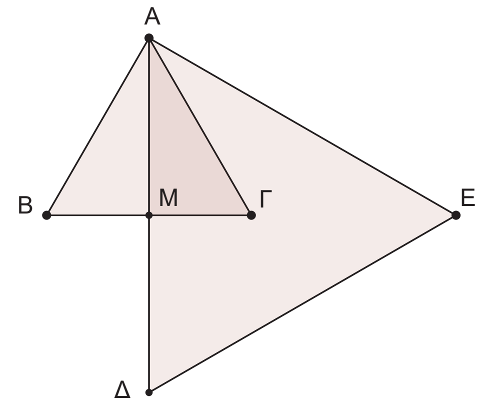
9. Στο σχήμα που ακολουθεί δίνονται τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ έτσι ώστε το τετράπλευρο ΑΒΔΓ να είναι ρόμβος.
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Β, Γ, Ε είναι συνευθειακά.

β) Το σημείο Γ είναι το βαρύκεντρο του ΑΔΕ.

γ) Το σημείο Γ ισαπέχει των Α, Β, Δ, Ε.

δ) Αν ρ,R οι ακτίνες του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου του ΑΔΕ τότε $2ρ = R$.



10. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α} = 90^\circ$) φέρουμε το ύψος ΑΔ και τη διάμεσο ΑΜ Από το Δ φέρουμε ΔΕ κάθετο στην ΑΒ και ΔΖ κάθετο στην ΑΓ. Αν Η το μέσο του ΑΒ, να αποδείξετε ότι:

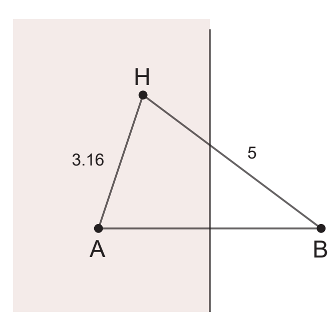
α) Τα ευθύγραμμα τμήματα ΖΕ και ΑΜ είναι κάθετα μεταξύ τους.

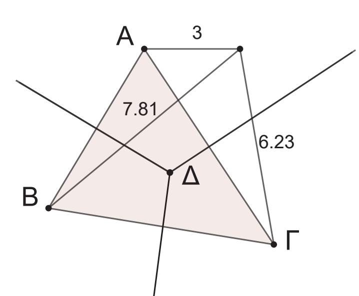
β) Η παράλληλη από το Β προς την ΕΖ διέρχεται από το σημείο τομής των ΑΔ και ΜΗ.

Στιγμές από την ιστορία των μαθηματικών

Διαγράμματα Voronoi

Γνωρίζουμε ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος.
Συγχρόνως η μεσοκάθετος χωρίζει το επίπεδο σε δύο μέρη (ημιεπίπεδα), όπου το κάθε ένα αποτελείται από σημεία που απέχουν μικρότερη απόσταση από το ένα άκρο του τμήματος σε σχέση με το άλλο.
Γνωρίζουμε, επίσης, ότι οι τρεις μεσοκάθετοι των πλευρών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το περίκεντρο.
Οπότε το περίκεντρο και οι μεσοκάθετοι χωρίζουν το επίπεδο σε τρεις περιοχές που τα σημεία της κάθε μιας απέχουν μικρότερη απόσταση από τη μία κορυφή σε σχέση με τις άλλες.
Την ιδιότητα αυτή μπορούμε να την χρησιμοποιήσουμε για να λύσουμε προβλήματα.





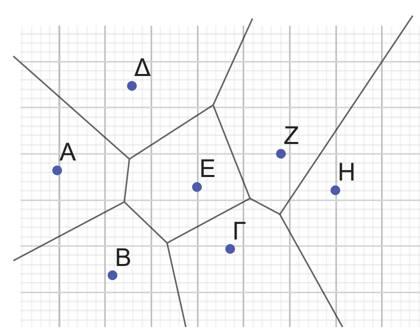
Για παράδειγμα

α) Σε μία πόλη υπάρχουν τρία νοσοκομεία στις θέσεις Α, Β, Γ. Ο Δήμαρχος για να εξυπηρετήσει καλύτερα τις ανάγκες των δημοτών ζητά από τις υπηρεσίες υγείας του Δήμου να του φτιάξουν έναν χάρτη που να χωρίζει την πόλη σε τρεις περιοχές με βάση την απόσταση από το κάθε νοσοκομείο. Ο στόχος είναι οι πολίτες να γνωρίζουν ανάλογα με το πού μένουν, ποιο νοσοκομείο είναι πλησιέστερα. Μπορείτε να βοηθήσετε;

β) Για την καλύτερη εξυπηρέτηση των πολιτών αποφασίζεται να χτιστεί και ένα ακόμα νοσοκομείο στη θέση Δ. Χωρίστε την πόλη σε τέσσερις περιοχές εξυπηρέτησης πολιτών με βάση την πλησιέστερη απόσταση από το κάθε νοσοκομείο.

Το πρόβλημα που αντιμετωπίσαμε προηγουμένως απασχόλησε τον Ρώσο μαθηματικό **Georgy Feodosevich Voronoi**, ο οποίος έδωσε και για πρώτη φορά τη λύση του γενικεύοντάς το.
Δηλαδή, αν υποθέσουμε ότι έχουμε πέντε σημεία, με ποια διαδικασία – αλγόριθμο μπορούμε να χωρίσουμε το επίπεδο σε πέντε περιοχές, που η κάθε μία θα αποτελείται από σημεία που βρίσκονται πλησιέστερα σε ένα σημείο σε σχέση με τα υπόλοιπα.
Το ίδιο πρόβλημα με έξι σημεία ή γενικεύοντας με οποιαδήποτε αριθμό σημείων.

Το GeoGebra έχει τη δυνατότητα γράφοντας στο πεδίο εισαγωγής Voronoi [Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η] να σχηματίσει αμέσως το διάγραμμα Voronoi για τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η ή για όσα σημεία θελήσουμε να εισαγάγουμε στο φύλλο σχεδίασης μας.



Εργασία για το σπίτι

Σε ένα φύλλο του τετραδίου σας σημειώστε 3 σημεία. Χωρίστε το επίπεδο του φύλλου εργασίας σε τρεις περιοχές, που τα σημεία της κάθε μιας απέχουν μικρότερη απόσταση από τη μία κορυφή σε σχέση με τις άλλες. Θεωρείστε 4 σημεία και εργαστείτε παρόμοια.

5.4 Τραπέζιο

Τι καινούργιο υπάρχει στην ενότητα

Στις παρακάτω σελίδες:

- γνωρίζουμε το τραπέζιο,
- ανακαλύπτουμε τις ιδιότητες της διαμέσου ενός τραπεζίου,
- μαθαίνουμε τις ιδιότητες του τμήματος που συνδέει τα μέσα των διαγωνίων ενός τραπεζίου,
- θυμόμαστε το ισοσκελές τραπέζιο,
- μελετάμε τις ιδιότητες του ισοσκελούς τραπεζίου,
- αναφερούμε τα κριτήρια, ώστε ένα τραπέζιο να είναι ισοσκελές.

Απαραίτητες γνώσεις

Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζονται τετράπλευρα που το βασικό χαρακτηριστικό τους είναι να έχουν δύο μόνο πλευρές τους παράλληλες. Πώς ονομάζουμε ένα τέτοιο τετράπλευρο;

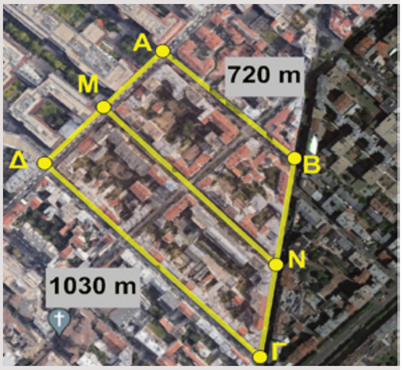
Ένα τέτοιο τετράπλευρο το ονομάζουμε **τραπέζιο** με **βάσεις** τις παράλληλες πλευρές.
Άρα ο σχεδιασμός ενός τραπεζίου είναι εύκολη υπόθεση.
Σχεδιάζουμε απλά ένα τυχαίο τετράπλευρο, που να έχει μόνο δύο πλευρές του παράλληλες.

Δραστηριότητα

Γεωμετρικά σχήματα στο κέντρο του Παρισίου.
Η πολεοδομία του Παρισιού χαρακτηρίζεται από την έντονη παρουσία γεωμετρικών σχημάτων. Στη διπλανή εικόνα παρουσιάζεται ένα μεγάλο τραπέζιο να σχηματίζεται από τους παράλληλους δρόμους ΑΒ, ΔΓ και ΜΝ. Συνδυάζοντας όσα έχεις μάθει στις προηγούμενες παραγράφους:

α) Αν είναι γνωστό ότι το Μ είναι το μέσο του ΑΔ, δικαιολόγησε γιατί το σημείο Ν είναι το μέσο του ΒΓ.

β) Αν είναι γνωστό ότι ΑΒ = 720 m και ΔΓ = 1030 m μπορείτε να υπολογίσετε το μήκος του δρόμου ΜΝ;



Ας δούμε τι έχει προκύψει

Α. Βασικά θεωρήματα στο τραπέζιο

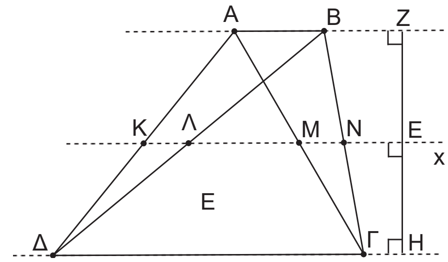
ΘΕΩΡΗΜΑ

Τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών ενός τραπεζίου και τα μέσα των διαγωνίων είναι σημεία συνευθειακά πάνω στην μεσοπαράλληλο των φορέων των βάσεων. (Σχ.23)

Θυμηθείτε το θεώρημα του Θαλή, τί έλεγε; *«Αν τρεις παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μία ευθεία, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία που τις τέμνει».* Οπότε:

Αποδειξη

Από το μέσο Κ της ΑΔ φέρουμε παράλληλη προς τις βάσεις• τότε επειδή οι $AB \parallel Kx \parallel \Delta\Gamma$ ορίζουν ίσα τμήματα ΑΚ = ΚΔ στην ΑΔ θα ορίζουν ίσα τμήματα και στις ΒΔ, ΑΓ και ΒΓ. Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία τομής Λ, Μ, Ν της Μx με τις ΒΔ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα θα είναι τα μέσα τους.



Σχήμα 23

Θεωρούμε τυχαίο σημείο Ε στην ευθεία που ορίζεται από τα σημεία Κ και Ν. Φέρουμε κάθετη στην Κx στο Ε, τότε αυτή θα τέμνει κάθετα και τις παράλληλες της Κx, ΑΒ και ΔΓ στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα. Επίσης, επειδή οι ΑΒ||Κx||ΔΓ ορίζουν ίσα τμήματα στην ΑΔ θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ΖΗ. Άρα το τυχαίο σημείο Ε ισαπέχει από τις ΑΒ και ΔΓ. Άρα θα ανήκει στην μεσοπαράλληλη των φορέων των βάσεων του τραπεζίου. ■

ΠΟΡΙΣΜΑ 1

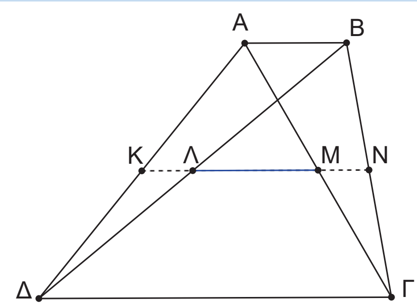
Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών ενός τραπεζίου είναι παράλληλο προς τις βάσεις του τραπεζίου και ίσο με το ημιάθροισμα τους.
Το τμήμα αυτό λέγεται **διάμεσος** του τραπεζίου (Σχ.24).

Αποδειξη

Στο τρίγωνο ΑΔΒ ισχύουν: $\begin{cases} K \text{ μέσο } A\Delta \\ \Lambda \text{ μέσο } \Delta B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K\Lambda \parallel AB \\ K\Lambda = \dfrac{AB}{2} \end{cases}$

Στο τρίγωνο ΒΔΓ ισχύουν: $\begin{cases} \Lambda \text{ μέσο } B\Delta \\ N \text{ μέσο } B\Gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Lambda N \parallel \Delta\Gamma \\ \Lambda N = \dfrac{\Delta\Gamma}{2} \end{cases}$

Άρα $KN = K\Lambda + \Lambda N = \dfrac{AB}{2} + \dfrac{\Delta\Gamma}{2} = \dfrac{AB + \Delta\Gamma}{2}$. ■



Σχήμα 24

ΠΟΡΙΣΜΑ 2

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των διαγώνιων ενός τραπεζίου είναι παράλληλο προς τις βάσεις του τραπεζίου και ίσο με την ημιδιαφορά τους. (Σχ.24)

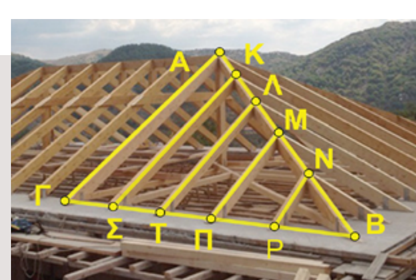
Αποδειξη

Στο τρίγωνο ΑΔΓ ισχύουν: $\begin{cases} K \text{ μέσο } A\Delta \\ M \text{ μέσο } A\Gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} KM \parallel \Delta\Gamma \\ KM = \dfrac{\Delta\Gamma}{2} \end{cases}$.

Στο τρίγωνο ΑΔΒ ισχύουν: $\begin{cases} K \text{ μέσο } A\Delta \\ \Lambda \text{ μέσο } \Delta B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K\Lambda \parallel AB \\ K\Lambda = \dfrac{AB}{2} \end{cases}$. Άρα $\Lambda M = KM - K\Lambda = \dfrac{\Delta\Gamma}{2} - \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\Delta\Gamma - AB}{2}$. ■

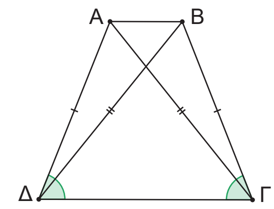
Δραστηριότητα

Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζεται ο σκελετός μίας ξύλινης σκεπής. Παρατηρείστε ότι στο τρίγωνο ΑΒΓ τα τμήματα ΑΓ, ΚΣ, ΛΤ, ΜΠ και ΝΡ είναι παράλληλα μεταξύ τους και συγχρόνως είναι ΑΚ = ΚΛ = ΛΜ = ΜΝ = ΝΒ.
Αν ΝΡ = 1 m, πώς μπορούμε να υπολογίσουμε τα μήκη των ΑΓ, ΚΣ, ΛΤ και ΜΠ;



Β. Ισοσκελές τραπέζιο

Ένα τραπέζιο λέγεται ισοσκελές, αν έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες.



Δραστηριότητα

Σχεδιάστε ένα ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $ΑΒ \parallel ΓΔ$.
Αποδείξτε ότι έχει τις γωνίες των βάσεων του ίσες, δηλαδή $\hat{Α} = \hat{Β}$ και $\hat{Γ} = \hat{Δ}$.
Αποδείξτε ότι οι διαγώνιοί του είναι ίσες, δηλαδή ΑΓ = ΒΔ.

Ας δούμε τι έχει προκύψει

Αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές τότε:
1. Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες. **2.** Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

Δραστηριότητα

Αποδείξτε ότι ένα τραπέζιο που έχει:
- τις γωνίες μιας βάσης του ίσες
- ή τις διαγωνίους του ίσες,

είναι ισοσκελές τραπέζιο, δηλαδή έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες.

Ας δούμε τι έχει προκύψει

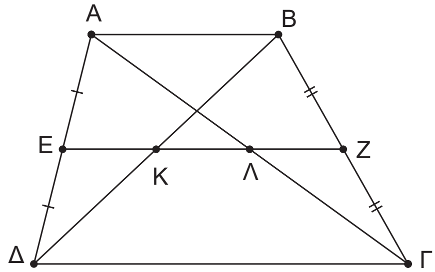
Ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις:
1. Οι μη παράλληλες πλευρές του είναι ίσες. **2.** Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση του είναι ίσες.
3. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Αν σε τραπέζιο η μία του βάση είναι διπλάσια της άλλης, να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι χωρίζουν τη διάμεσό του σε τρία ίσα τμήματα.

ΛΥΣΗ

Τι γνωρίζουμε από τη θεωρία;
1. Τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών και τα μέσα των διαγωνίων τραπεζίου βρίσκονται σε ευθεία παράλληλη των βάσεων.
2. Η διάμεσος ΕΖ είναι ίση με το ημιάθροισμα των βάσεων, άρα $ΕΖ = \dfrac{ΑΒ + ΓΔ}{2}$.
3. Για το τμήμα που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων ισχύει ότι $ΚΛ = \dfrac{ΔΓ - ΑΒ}{2}$.



Τι γνωρίζουμε από τα δεδομένα της άσκησης;
Ισχύει ότι ΔΓ = 2ΑΒ ή αν ονομάσουμε ΑΒ = β τότε ΔΓ = 2β. Συγχρόνως η ύπαρξη πολλών μέσων μας οδηγεί στην υπόθεση ότι μπορεί να εφαρμόζεται και το θεώρημα για το τμήμα που ενώνει τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου. Συνδυάζοντας τη θεωρία και τα δεδομένα καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα:

Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ ισχύει $ΚΛ = \dfrac{ΔΓ - ΑΒ}{2} = \dfrac{2β - β}{2} = \dfrac{β}{2}$.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν $\begin{cases} Λ \text{ μέσο } ΑΓ \\ Ζ \text{ μέσο } ΒΓ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ΛΖ \parallel ΑΒ \\ ΛΖ = \dfrac{ΑΒ}{2} = \dfrac{β}{2} \end{cases}$.

Στο τρίγωνο ΑΒΔ ισχύουν $\begin{cases} Ε \text{ μέσο } ΑΔ \\ Κ \text{ μέσο } ΒΔ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ΕΚ \parallel ΑΒ \\ ΕΚ = \dfrac{ΑΒ}{2} = \dfrac{β}{2} \end{cases}$. Άρα θα είναι $ΚΛ = ΛΖ = ΕΚ = \dfrac{β}{2}$.

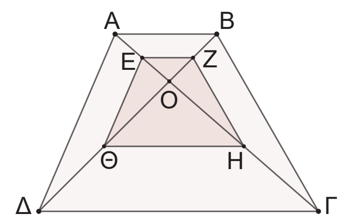
2. Οι διαγώνιοι ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ, με ΑΒ||ΓΔ τέμνονται στο Ο. Αν Ε, Ζ, Η, Θ είναι τα μέσα των ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ και ΟΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΕΖΗΘ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λυση

Τι γνωρίζουμε από τη θεωρία;

1. Τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών και τα μέσα των διαγωνίων βρίσκονται σε ευθεία παράλληλη των βάσεων.
2. Η διάμεσος είναι ίση με το ημιάθροισμα των βάσεων.
3. Το τμήμα που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων είναι ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεων.
4. Το ισοσκελές τραπέζιο έχει τις μη παράλληλες πλευρές ίσες, τις διαγωνίους του ίσες και τις γωνίες της βάσης του ίσες.
5. Για να δείξουμε ότι ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, αρκεί να δείξουμε ότι έχει τις μη παράλληλες πλευρές ίσες ή ότι οι διαγώνιοί του είναι ίσες ή ότι οι γωνίες της βάσης είναι ίσες.

Τι γνωρίζουμε από τα δεδομένα της άσκησης;



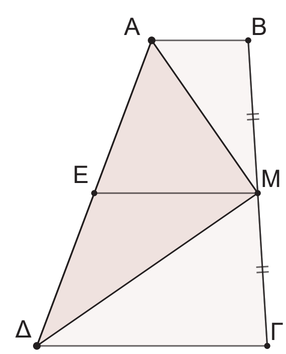
Υπάρχουν πολλά μέσα, οπότε μπορεί να εφαρμόζεται το θεώρημα για το τμήμα που ενώνει τα μέσα των πλευρών τριγώνου.

Συνδυάζοντας τη θεωρία και τα δεδομένα καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα:

Στο τρίγωνο ΑΟΒ το τμήμα ΕΖ ενώνει μέσα πλευρών οπότε $ΕΖ \parallel ΑΒ$ (1).

Στο τρίγωνο ΔΟΓ το τμήμα ΘΗ ενώνει μέσα πλευρών, επομένως $ΘΗ \parallel ΔΓ$ (2).

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι ΕΖ || ΘΗ. Στο τρίγωνο ΑΔΟ το ΕΘ ενώνει μέσα πλευρών, άρα ΕΘ || ΑΔ, όμοια στο ΟΒΓ θα είναι ΖΗ || ΒΓ. Επειδή οι ΑΔ και ΒΓ δεν είναι παράλληλες, δεν θα είναι και οι ΕΗ και ΖΗ. Άρα το ΕΖΗΘ είναι τραπέζιο, διότι έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες. Επειδή το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οι διαγώνιοί του είναι ίσοι, άρα ΑΓ = ΒΔ, οπότε και ΘΖ = ΕΗ ως μισά ίσων τμημάτων. Οπότε το τραπέζιο ΕΖΗΘ έχει τις διαγώνιούς του ίσες, άρα είναι ισοσκελές τραπέζιο.



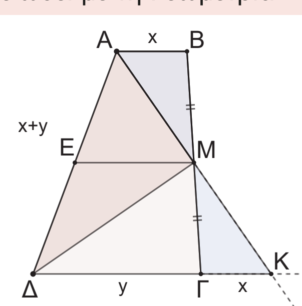
3. Σε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ η μία από της μη παράλληλες πλευρές του ΑΔ ισούται με το άθροισμα των βάσεων. Αν Μ το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι $Α\hat{Μ}Δ = 90^0$.

Λυση

Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε ΑΔ = ΑΒ + ΔΓ. Αν ΕΜ διάμεσος του τραπεζίου, τότε $ΕΜ = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2} = \frac{ΑΔ}{2}$. Άρα στο τρίγωνο ΑΜΔ η διάμεσος ΜΕ είναι ίση με το μισό της πλευράς που αντιστοιχεί.

Επομένως, το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή, άρα $Α\hat{Μ}Δ = 90^o$.

Τη συγκεκριμένη άσκηση αξίζει να την λύσουμε και με έναν διαφορετικό τρόπο, με διαφορετική βοηθητική ευθεία. Μία κίνηση αρκετά συνηθισμένη και οικεία, όταν κάποια/-ος εξοικειωθεί με τη Γεωμετρία.



Προεκτείνουμε την ΑΜ μέχρι να τμήσει την προέκταση της ΔΓ στο σημείο Κ.

Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΚΓΜ είναι ίσα. (Γιατί;)

Από την ισότητα έχουμε ότι ΑΒ = ΓΚ = x και ΑΜ = ΜΚ.

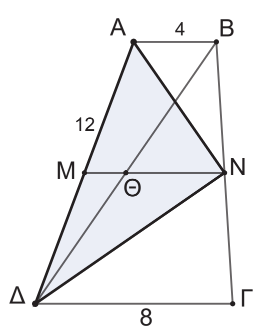
Στο τρίγωνο ΑΔΚ έχουμε ότι ΑΔ = ΔΚ = y + x, δηλαδή είναι ισοσκελές και η ΔΜ είναι διάμεσος, άρα θα είναι και ύψος, οπότε $Α\hat{Μ}Δ = 90^o$.

Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους

1. Αν σε ένα τετράπλευρο δύο διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές, τότε το τετράπλευρο είναι τραπέζιο.
2. Σε ένα τραπέζιο τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών και τα μέσα των διαγωνίων βρίσκονται στην ίδια ευθεία που είναι παράλληλη των βάσεων.
3. Η διάμεσος ενός τραπεζίου είναι ίση με το διπλάσιο του αθροίσματος των βάσεών του.
4. Το τμήμα που συνδέει τα μέσα των διαγωνίων ενός τραπεζίου είναι ίσο με το διπλάσιο της διαφοράς των βάσεών του.
5. Αν ένα τραπέζιο έχει ίσες διαγωνίους, τότε είναι ισοσκελές τραπέζιο.
6. Αν ένα τραπέζιο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ισοσκελές.

Ασκήσεις και Προβλήματα

1. Δίνεται τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ $ΑΒ \parallel ΓΔ$ με $ΑΒ = 4$, $ΔΓ = 8$ και $ΑΔ = 12$. Αν $Μ, Ν$ τα μέσα των $ΑΔ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα:

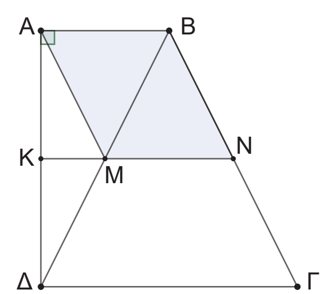


α) Να υπολογίσετε το μήκος της $ΜΝ$.
β) Να υπολογίσετε τη γωνία $Α\hat{Ν}Δ$.
Αν η $ΔΒ$ τέμνει το $ΜΝ$ στο $Θ$,
γ) να υπολογίσετε τα τμήματα $ΜΘ$ και $ΘΝ$.
δ) Να δικαιολογήσετε γιατί το $Θ$ είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου $ΑΔΝ$ και το $ΑΒΝΘ$ είναι παραλληλόγραμμο.

2. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ και το ύψος του $ΑΗ$. Αν $Δ$, $Ε$ και $Ζ$ είναι τα μέσα των $ΑΒ, ΑΓ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΔΕΖΗ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

3. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, φέρουμε ΑΕ κάθετη στην ΔΓ. Αν Κ και Λ τα μέσα των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΚΛΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

4. Δίνεται τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ $(ΑΒ \parallel ΓΔ)$ με $\hat{Α} = 90^\circ$. Αν η διάμεσος $ΚΝ$ του τραπεζίου τέμνει την διαγώνιο $ΒΔ$ στο $Μ$ και σχηματίζεται ο ρόμβος ΑΒΝΜ πλευράς ΑΒ = 4, τότε:
α) Να υπολογίσετε τα τμήματα $ΚΜ$ και $ΔΓ$
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΒΔΓ$ είναι ισόπλευρο.
γ) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{Β}, \hat{Γ}$ και $\hat{Δ}$ του τραπεζίου.



5. Δίνεται τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ $(ΑΒ \parallel ΓΔ)$ με $ΓΔ = 3ΑΒ$ και $Κ, Λ$ τα μέσα των διαγωνίων του $ΔΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το $ΑΚΛΒ$ είναι παραλληλόγραμμο. Ποιες επιπλέον ιδιότητες πρέπει να έχει το τραπέζιο $ΑΒΓΔ$, ώστε το $ΑΒΛΚ$ να είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο;

6. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και στην προέκταση της ΔΓ προς το Γ παίρνουμε τμήμα ΓΕ = 3ΓΔ. Αν Κ, Λ τα μέσα των ΑΕ και ΒΓ, να αποδείξετε ότι το ΑΒΚΛ είναι παραλληλόγραμμο.

7. Σε τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ $(ΑΒ \parallel ΓΔ)$ η διχοτόμος της γωνίας του $\hat{Β}$ τέμνει τη διάμεσό του $ΕΖ$ στο $Η$, να αποδείξετε ότι $Β\hat{Η}Γ = 90^\circ$.

8. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι $\hat{A}=\hat{\Delta}=90^\circ$ και $\Delta\Gamma=2AB$. Φέρουμε τμήμα $BH\perp\Delta\Gamma$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο P και το τμήμα AH που τέμνει την $B\Delta$ στο N. Να αποδείξετε ότι το P είναι το μέσο της BH και $NP=\frac{1}{4}\Delta\Gamma$

9. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ||ΓΔ) έχουμε $A\Delta=AB+\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ τέμνονται στην $B\Gamma$.

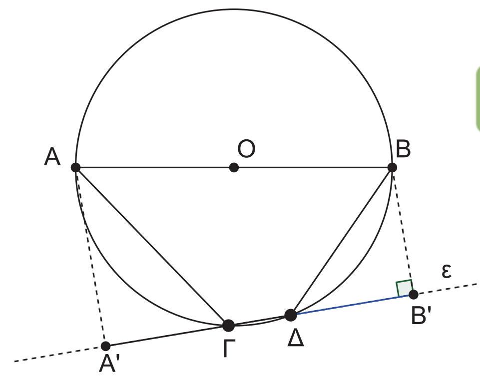
10. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο το σημείο Κ. Θεωρούμε ευθεία ε που αφήνει όλες τις κορυφές του παραλληλογράμμου προς το ίδιο μέρος της και να μην είναι παράλληλη σε καμία από τις διαγωνίους ΑΓ και ΒΔ του ΑΒΓΔ. Φέρουμε ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄, ΔΔ΄, ΚΚ΄ κάθετες στην ε.
Να αποδείξετε ότι $AA'+BB'+\Gamma\Gamma'+\Delta\Delta'=4KK'$.

11. Από την κορυφή Α τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ευθεία ε που δεν τέμνει το τρίγωνο και δεν είναι παράλληλη της ΒΓ. Φέρουμε τις αποστάσεις BB' και $\Gamma\Gamma'$ των Β και Γ από την ευθεία ε.
Αν Μ είναι το μέσο του $B'\Gamma'$ και Κ το μέσο της διαμέσου ΑΔ να αποδείξετε ότι $MK=\frac{A\Delta}{2}$.

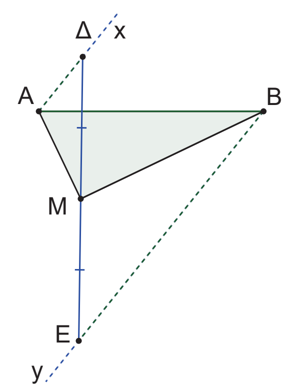
12. Μια ευθεία ε διέρχεται από την κορυφή Δ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και έχει εκατέρωθεν αυτής τις κορυφές Β και Γ. Φέρουμε ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ κάθετες στην ευθεία ε.
Να αποδείξετε ότι $AA'-\Gamma\Gamma'=BB'$ $(AA'>\Gamma\Gamma')$.

13. Δίνεται το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $2A\Delta=B\Delta$ και το κέντρο του Ο. Αν η μεσοκάθετος του ΒΔ τέμνει την ευθεία ΑΔ στο Ε και την ΑΒ στο Ζ να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΔΒΕ είναι ισόπλευρο.
β) Το τετράπλευρο ΑΟΒΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
γ) Το σημείο Ζ είναι το περίκεντρο του τριγώνου ΔΕΒ.

14. Στο παρακάτω σχήμα η ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου (Ο,ρ) και η ΓΔ μία χορδή του, ώστε να μην είναι παράλληλη της ΑΒ. Φέρουμε ΑΑ΄ και ΒΒ΄ κάθετες στον φορέα της ΓΔ. Να αποδείξετε Α΄Γ = ΔΒ΄.



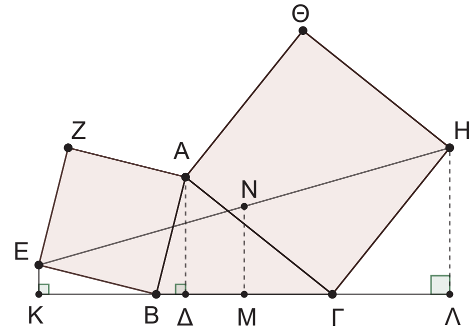
15. Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και οι ημιευθείες Αx||By. Στην Αx ημιευθεία θεωρούμε τυχαίο τμήμα ΑΔ και στην By τμήμα $BE=A\Delta+AB$. Αν Μ μέσο της ΔΕ, να αποδείξετε ότι η γωνία $A\hat{M}B$ είναι ορθή.



16. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $B>90^\circ$ και $AB=2\cdot B\Gamma$. Θεωρούμε την ΓΕ κάθετη στον φορέα της ΑΔ και τα μέσα Κ και Λ των πλευρών ΔΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) το τετράπλευρο ΑΛΚΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο,
β) το τρίγωνο ΕΛΓ είναι ισοσκελές,
γ) το Κ είναι περίκεντρο του τριγώνου ΕΛΓ.

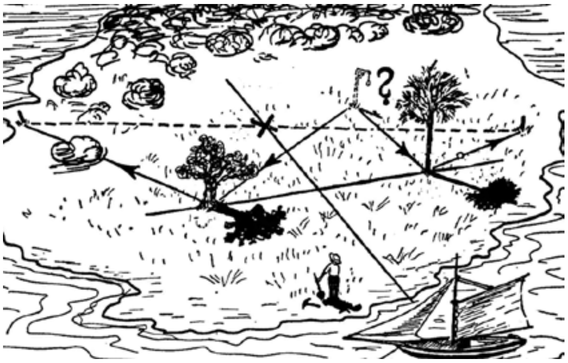
17. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και τα τετράγωνα ΑΒΕΖ και ΑΘΗΓ, όπως στο σχήμα. Αν ΕΚ, ΑΔ και ΗΛ κάθετα τμήματα στον φορέα της πλευράς ΒΓ, να αποδείξετε ότι:
α) τα τρίγωνα ΕΚΒ και ΑΒΔ, όπως και τα ΑΔΓ και ΓΛΗ είναι ίσα μεταξύ τους,
β) $B\Gamma=EK+H\Lambda$,
γ) Αν Μ, Ν τα μέσα των ΒΓ και ΕΗ αντίστοιχα τότε να αποδείξετε ότι:

$2ΜΝ = ΕΚ + ΗΛ$ και ότι το τρίγωνο ΒΝΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.



18. Μέσα στο σκονισμένο παλιό μπαούλο του παππού βρήκαμε έναν χάρτη και ένα κείμενο που μας πληροφορούσαν για την ύπαρξη ενός θησαυρού. Το κείμενο και ο χάρτης το παρουσιάζουμε παρακάτω.

«Στο νησί ………. μέσα στο λιβάδι υψώνεται μια μοναχική **βελανιδιά** και ένα μοναχικό **πεύκο**. Εκεί θα δεις και μια πολυκαιρισμένη **αγχόνη** που τη χρησιμοποιούσαν παλιά. **Ξεκίνα από την αγχόνη και περπάτα προς τη βελανιδιά μετρώντας τα βήματά σου. Στη βελανιδιά στρίψε δεξιά σχηματίζοντας ορθή γωνία και περπάτησε τον ίδιο αριθμό βημάτων**. Κάρφωσε έναν **πάσσαλο** στο σημείο που θα φτάσεις. Τώρα πρέπει να γυρίσεις **πίσω στην αγχόνη και να περπατήσεις προς το πεύκο, μετρώντας πάλι τα βήματά σου. Στο πεύκο στρίψε αριστερά σχηματίζοντας ορθή γωνία και φρόντισε να περπατήσεις ίδιο αριθμό βημάτων**. Μόλις φτάσεις, κάρφωσε έναν **δεύτερο πάσσαλο**. **Σκάψε στα μισά του δρόμου ανάμεσα στους δυο πασσάλους. Ο θησαυρός βρίσκεται εκεί.»**

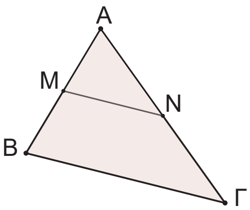


Αλίμονο η παλιά αγχόνη έχει από καιρό τώρα χαθεί, μαζί της και ο θησαυρός ή μήπως όχι; Μπορείτε να βοηθήσετε;

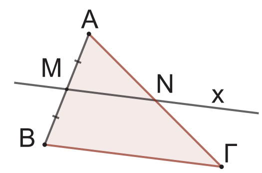
Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό ως γρίφος του **Gamow (1904 – 1968)** και παρουσιάζεται στο γνωστό βιβλίο του «**one two three… infinity**» Αποδώστε το κείμενο, με τη βοήθεια του χάρτη με το κατάλληλο γεωμετρικό σχήμα. Ανακαλύψτε τις κρυμμένες γεωμετρικές σχέσεις που υπάρχουν και αποδείξε ότι η θέση του θησαυρού μπορεί να καθοριστεί ακόμα και αν η θέση της παλιάς αγχόνης έχει χαθεί. Για περισσότερη βοήθεια δείτε ξανά την άσκηση 17.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

1. Βασικά θεωρήματα στο τρίγωνο



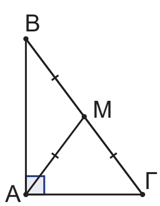
Υ	Μ μέσο ΑΒ, Ν μέσο ΑΓ
Σ	ΜΝ||ΒΓ $MN=\frac{B\Gamma}{2}$



Υ	Μ μέσο ΑΒ, Μx||ΒΓ
Σ	Ν μέσο ΑΓ

Εφαρμογή του Θ1: Τα μέσα των πλευρών ενός τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου

2. Θεωρήματα στο ορθογώνιο τρίγωνο

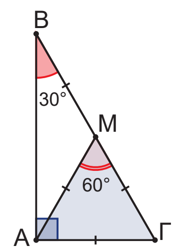


ορθό

Υ	ΑΒΓ ορθογώνιο ΑΜ διάμεσος
Σ	$AM=\frac{B\Gamma}{2}$

αντίστροφο

Υ	ΑΜ διάμεσος $AM=\frac{B\Gamma}{2}$
Σ	ΑΒΓ ορθογώνιο



ορθό

Υ	ΑΒΓ ορθογώνιο Β=30°
Σ	$A\Gamma=\frac{B\Gamma}{2}$

αντίστροφο

Υ	ΑΒΓ ορθογώνιο $A\Gamma=\frac{B\Gamma}{2}$
Σ	Β=30°

3. Βασικά σημεία - κύκλοι τριγώνου

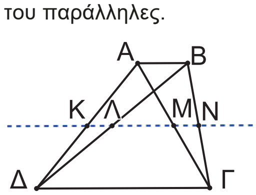
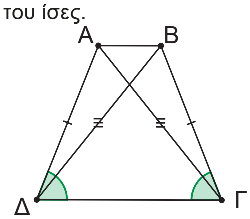
α) **Ορθόκεντρο**: Είναι το σημείο τομής των υψών.

β) **Έγκεντρο**: Είναι το σημείο τομής των διχοτόμων, ισαπέχει από τις πλευρές του τριγώνου, είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου.

γ) **Βαρύκεντρο**: Είναι το σημείο τομής των διαμέσων, απέχει από την κάθε κορυφή απόσταση ίση με τα $\frac{2}{3}$ της αντίστοιχης διαμέσου.

δ) **Περίκεντρο**: Είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων, έχει την ιδιότητα να ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου, είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου.

4. Τραπέζιο

Σχήμα	Ιδιότητες	Για να δείξω ότι ένα τετράπλευρο είναι ... αρκεί να δείξω
Είναι το τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές του παράλληλες. 	Έχει δύο πλευρές παράλληλες που λέγονται βάσεις. Τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του και τα μέσα των διαγωνίων του είναι σημεία συνευθειακά, πάνω στην μεσοπαράλληλο των βάσεων. Ισχύουν οι ισότητες: $KN=\frac{AB+\Delta\Gamma}{2}$ $\Lambda M=\frac{\Delta\Gamma-AB}{2}$	Έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες
Είναι το τραπέζιο που έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες. 	Έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες και τις άλλες δύο ίσες. Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση του είναι ίσες. Οι διαγώνιοι του είναι ίσες.	Είναι τραπέζιο και επιπλέον ότι: έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες ή τις γωνίες που πρόσκεινται σε μία βάση του ίσες ή τις διαγωνίους του ίσες

Επαναληπτικο Φυλλο Αξιολογησης

Ερωτήσεις θεωρίας (Μονάδες 5 + 3 = 8)

Ερώτηση

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η διάμεσος του ΑΜ είναι ίση με το μισό της πλευράς ΒΓ που αντιστοιχεί. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους

1. Ορθόκεντρο τριγώνου ονομάζεται το σημείο από το οποίο διέρχονται όλοι οι διχοτόμοι του.
2. Το βαρύκεντρο ενός τριγώνου ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου.
3. Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων ενός τραπεζίου ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεων.

Άσκηση 1η (μονάδες 6)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^{\circ}$) η διχοτόμος ΑΔ, η διάμεσος ΑΜ και το ύψος ΑΕ.

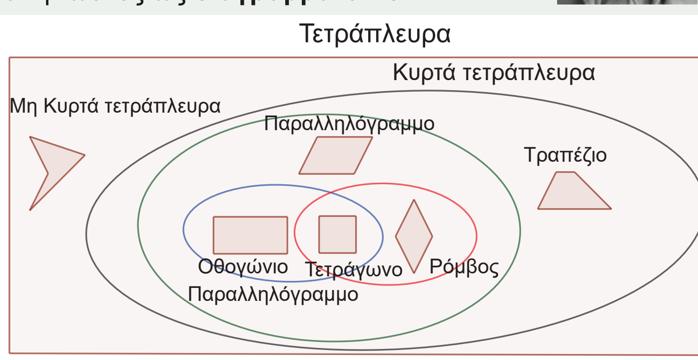
Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος ΑΔ διχοτομεί και την γωνία $E\hat{A}M$.

Άσκηση 2η (μονάδες 6)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε που δεν έχει κανένα κοινό σημείο με το τρίγωνο και δεν είναι παράλληλη σε καμιά από τις πλευρές του. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των αποστάσεων των κορυφών του τριγώνου από την ευθεία ε είναι ίσο με το άθροισμα των αποστάσεων των μέσων των πλευρών του τριγώνου από την ευθεία ε.

Στιγμές από την ιστορία των μαθηματικών

Ο **John Venn**, (1834–1923) ήταν Άγγλος Μαθηματικός που εργάστηκε σε τομείς όπως Λογική, Θεωρία Συνόλων, Πιθανότητες και Στατιστική. Το 1881 δημοσιεύει το “**Symbolic Logic**” στο οποίο εμφανίζεται ένας νέος τρόπος ταξινόμησης και παρουσίασης των συνόλων. Ο συμβολισμός που πρότεινε θα γινόταν γνωστός ως **διαγράμματα Venn**.



Τα τετράπλευρα με τα οποία ασχοληθήκαμε προηγουμένως μπορούν να ταξινομηθούν με την βοήθεια ενός τέτοιου διαγράμματος. Η πρώτη διάκριση γίνεται ανάμεσα στα κυρτά και μη κυρτά τετράπλευρα. Μη κυρτό λέγεται ένα τετράπλευρο, όταν ο φορέας μιας πλευράς του το χωρίζει σε δύο μέρη. Στα κυρτά τετράπλευρα περιλαμβάνονται τα τραπέζια και τα παραλληλόγραμμα.

Στα παραλληλόγραμμα περιλαμβάνονται τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα και οι ρόμβοι. Παρατηρήστε ότι τα δύο αυτά σύνολα τετράπλευρων (ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ρόμβος) έχουν κοινά στοιχεία τους τα τετράγωνα. Αφού, όπως μάθαμε, τετράγωνο είναι το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

Εργασία για το σπίτι

Ψάξτε στο διαδίκτυο τον όρο **«quadrilateral classification» - «ταξινόμηση τετραπλεύρων»** και παρουσιάστε στην τάξη σας τη δική σας πρόταση.

Κεφαλαιο 6

Στερεομετρία

6.1

Ευθείες και επίπεδα στον χώρο

Τι καινούργιο υπάρχει στην ενότητα

Στις παρακάτω σελίδες:

- μαθαίνουμε πως ορίζεται ένα επίπεδο,
- μαθαίνουμε να σχεδιάζουμε ευθείες και επίπεδα στον χώρο,
- ανακαλύπτουμε τις σχετικές θέσεις δύο επιπέδων,
- μελετάμε τις σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου,
- γνωρίζουμε τις σχετικές θέσεις δύο ευθειών στον χώρο των τριών διαστάσεων.

Απαραίτητες γνώσεις

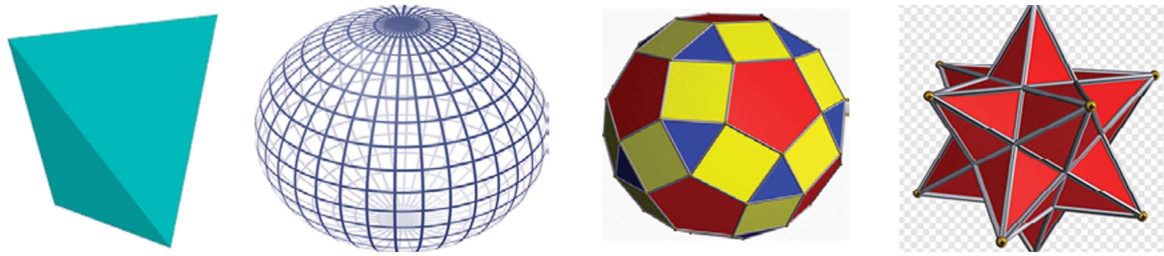
Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με γεωμετρικές μορφές, που βρίσκονται σχεδιασμένες στο επίπεδο του χαρτιού. Όμως, ο κόσμος γύρω μας δεν είναι επίπεδος.
Τα κτίρια, τα δένδρα, οι άνθρωποι, τα ζώα, είναι μορφές που αυτό που τα διακρίνει είναι ότι υπάρχουν σε ένα κόσμο, όπως λέμε, **τριών διαστάσεων**.

Γύρω μας τα πάντα είναι τρισδιάστατα!

Η ανάγκη να μελετηθούν και να υπολογιστούν κάποια χαρακτηριστικά των μορφών αυτών γέννησε τη **Στερεομετρία**. Το τι κάνει αυτός ο κλάδος των Μαθηματικών το λέει η ονομασία του.

Μετρά στερεά σχήματα!

Ξεκινά από απλές μορφές και φθάνει σε όλο και πιο σύνθετα και περίεργα…

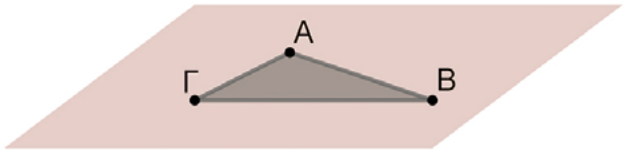


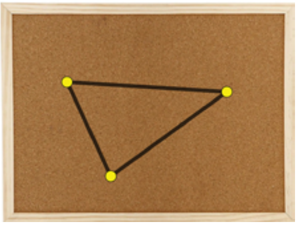
Η γνωριμία με τη Στερεομετρία θα γίνει ξεκινώντας με τις βασικές έννοιές της.
Το επίπεδο και την ευθεία, μόνο που τώρα θα τις βλέπουμε στον χώρο.
Ας απαντήσουμε, λοιπόν, με βάση την εμπειρία μας σε δύο βασικές ερωτήσεις.

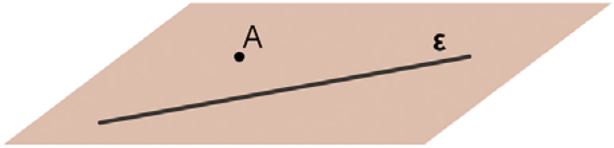
Ερώτηση 1η: Πώς ορίζουμε και σχεδιάζουμε στον χώρο ένα επίπεδο;

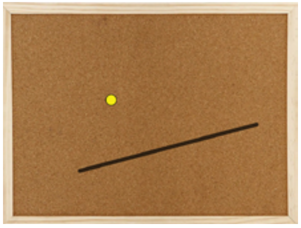
Δραστηριότητα

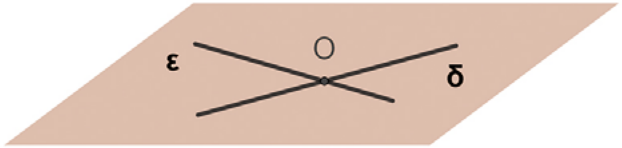
Με βάση τις εικόνες που παρουσιάζονται παρακάτω να διατυπώσετε τρόπους με τους οποίους μπορούμε να ορίσουμε και να σχεδιάσουμε στον χώρο ένα επίπεδο.

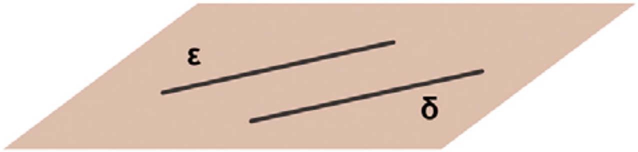










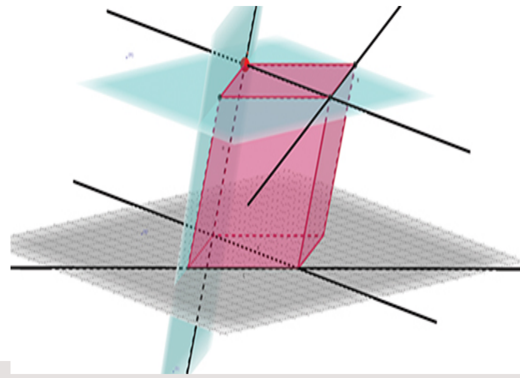


Ας δούμε τι έχει προκύψει

Ένα επίπεδο ορίζεται:

- από τρία μη συνευθειακά σημεία.
- από μία ευθεία και ένα σημείο εκτός αυτής.
- από δύο τεμνόμενες ευθείες.
- από δύο παράλληλες ευθείες.

Με τα παραπάνω γίνεται φανερός ο τρόπος με τον οποίο σχεδιάζουμε επίπεδα και ευθείες στον χώρο.



Ερώτηση 2η: Ποια είναι η σχετική θέση

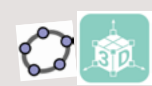
α) **δύο ευθειών μεταξύ τους;**

β) **δύο επιπέδων μεταξύ τους;**

γ) **ενός επιπέδου και μιας ευθείας;**

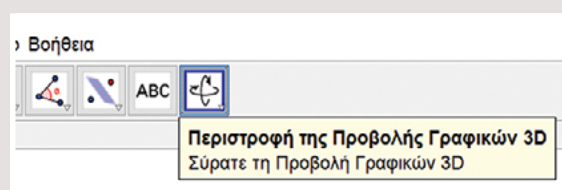
Δραστηριότητα

Ανοίξτε την εφαρμογή Geogebra.
Κάντε «κλικ» μέσα στον χώρο που είναι σχεδιασμένο το στερεό.
Με τη βοήθεια του εργαλείου (Περιστροφή της Προβολής Γραφικών 3D).



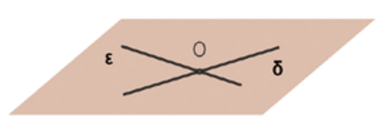
Ποια είναι η σχετική θέση:

- δύο ευθειών μεταξύ τους;
- δύο επιπέδων μεταξύ τους;
- μιας ευθείας και ενός επιπέδου;



Ας δούμε τι έχει προκύψει

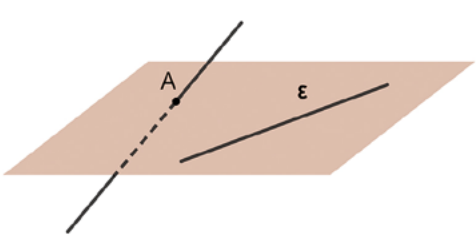
Α) **Δύο διαφορετικές ευθείες μπορεί:**
να βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, άρα μπορεί να τέμνονται (Σχ.1), ή να είναι παράλληλες. (Σχ.2)



Σχήμα 1

Σχήμα 2

Να είναι ασύμβατες, δηλαδή να μην υπάρχει επίπεδο που να περιέχει και τις δύο. (Σχ.3)

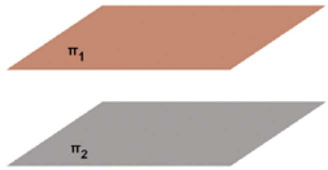


Σχήμα 3

Κοιτάξτε γύρω σας.
Μπορείτε να αναγνωρίσετε δύο ασύμβατες ευθείες;

Β) Δύο επίπεδα μπορεί να είναι:

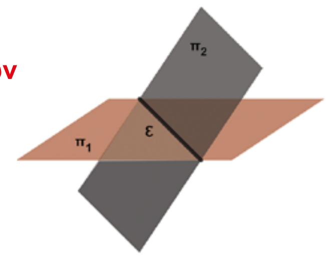
Παράλληλα μεταξύ τους, οπότε δεν έχουν κοινά σημεία. (Σχ.4)



Σχήμα 4

«Υπνοδωμάτιο στην Αρλ»
Vincent van Gogh 1853-1890

Να τέμνονται (Σχ.5), οπότε **τα κοινά σημεία δύο τεμνόμενων επιπέδων είναι σημεία μιας ευθείας.**



Σχήμα 5

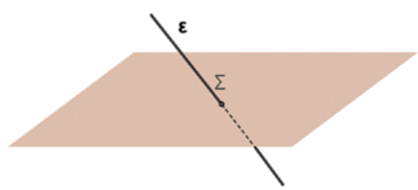
Κοιτάξτε γύρω σας.

Αναγνωρίζετε δύο παράλληλα επίπεδα; Αναγνωρίζετε δύο τεμνόμενα επίπεδα; Διακρίνετε την ευθεία – τομή των δύο επιπέδων;

Γ) Μία ευθεία μπορεί:
Να **ανήκει σε ένα επίπεδο.** (Σχ.6)

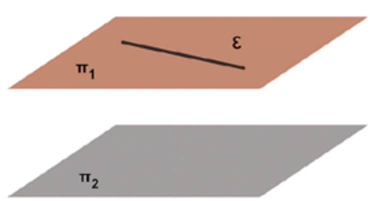
Σχήμα 6

Να **τέμνει ένα επίπεδο**, οπότε η ευθεία και το επίπεδο έχουν ένα κοινό σημείο. (Σχ.7) Το σημείο Σ λέγεται σημείο τομής ευθείας και επιπέδου.



Σχήμα 7

Να **είναι παράλληλη στο επίπεδο**, οπότε η ευθεία και το επίπεδο δεν έχουν κοινά σημεία. (Σχ.8)



Σχήμα 8

Michael Heiser
«City» Nevada USA

Κοιτάξτε γύρω σας, αναγνωρίζετε ευθεία παράλληλη προς ένα επίπεδο; Αναγνωρίζετε ευθεία που τέμνει ένα επίπεδο;

Ερωτήσεις κατανόησης

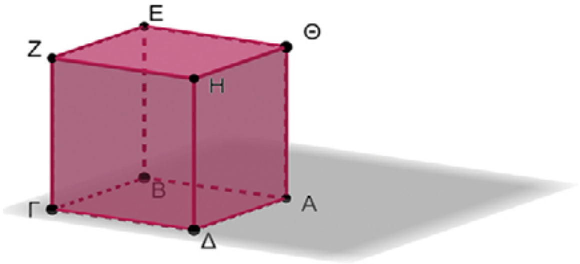
Α) Προσπαθήστε να αποδώσετε σχηματικά τις παρακάτω προτάσεις και να διατυπώσετε τις εικασίες σας.

1. Είναι δυνατόν δύο ευθείες στον χώρο να μην είναι παράλληλες και να μην τέμνονται;
2. Αν μία ευθεία είναι παράλληλη σε ένα επίπεδο, τότε είναι παράλληλη και προς όλες τις ευθείες του επιπέδου;
3. Πόσα επίπεδα διέρχονται από τρία μη συνευθειακά σημεία;
4. Πόσα επίπεδα διέρχονται από τέσσερα μη ομοεπίπεδα σημεία;

5. Υπάρχει ευθεία που να τέμνει δύο ασύμβατες ευθείες;
6. Είναι δυνατόν δύο ασύμβατες ευθείες να ανήκουν σε παράλληλα επίπεδα;

Β) Στον διπλανό **κύβο.** Να αναγνωρίσετε:

1. Δύο παράλληλα επίπεδα.
2. Δύο τεμνόμενα επίπεδα.
3. Δύο ασύμβατες ευθείες.
4. Το επίπεδο που ορίζουν τα σημεία $Α, Θ$ και $Γ$.
5. Την τομή των επιπέδων $ΑΘΗΔ$ και $ΘΖΓΑ$.
6. Την τομή των επιπέδων $ΘΗΓΒ$ και $ΑΒΓΔ$.
7. Την τομή των επιπέδων $ΑΘΕΒ$, $ΘΗΔΑ$ και $ΘΗΖΕ$.
8. Την τομή των επιπέδων $ΗΕΒΔ$ και $ΘΖΓΑ$.
9. Τρεις ασύμβατες μεταξύ τους ευθείες.
10. Την τομή των επιπέδων $ΑΘΕΒ$, $ΕΖΓΒ$ και $ΗΕΒΔ$.



Στο παραπάνω σχήμα να δικαιολογήσετε γιατί:

1. Η ευθεία $ΘΖ$ είναι παράλληλη στο επίπεδο $ΑΒΓΔ$.
2. Οι ευθείες $ΑΗ$ και $ΕΓ$ είναι ασύμβατες.

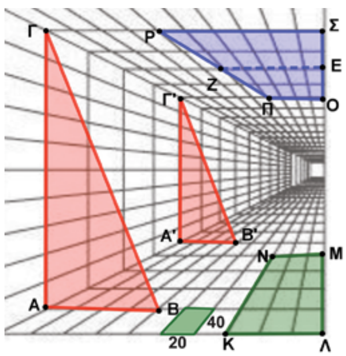
Γ) Στον παρακάτω πίνακα ζωγραφικής (**The Miracle of the Desecrated Host**) του **Paolo Uccello** που τον ζωγράφισε το 1467 μ.Χ. παρουσιάζεται ένα δωμάτιο όπου η αίσθηση του χώρου δίνεται παρουσιάζοντας παράλληλες ευθείες ως τεμνόμενες σε κάποιο σημείο εκτός του πίνακα (**σημείο φυγής**). Η τεχνική αυτή λέγεται **προοπτική** και μας δίνει τη δυνατότητα να ζωγραφίζουμε τρισδιάστατα στο επίπεδο.

Αναγνωρίστε:

1. Δύο ομοεπίπεδες παράλληλες ευθείες.
2. Δύο παράλληλα επίπεδα.
3. Δύο τεμνόμενα επίπεδα. Ποια είναι η ευθεία τομής τους;
4. Δύο ασύμβατες ευθείες που ανήκουν σε παράλληλα επίπεδα.
5. Δύο ασύμβατες ευθείες που ανήκουν σε τεμνόμενα επίπεδα.
6. Δύο ομοεπίπεδες τεμνόμενες ευθείες.

Ασκήσεις

1. Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται σε προοπτική ένα μακρόστενο δωμάτιο, όπου τις πλευρές του τις έχουμε στρώσει με ορθογώνια πλακάκια διαστάσεων $20\ \text{cm} \times 40\ \text{cm}$.

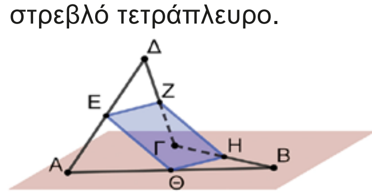


α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄.

β) Ποιο το είδος του τετράπλευρου ΚΛΜΝ και πόση είναι η περίμετρός του;

γ) Ποιο το είδος του τετράπλευρου ΡΣΟΠ; Αν Ε μέσο του ΣΟ και Ζ μέσο του ΡΠ, υπολογίστε το μήκος ΖΕ.

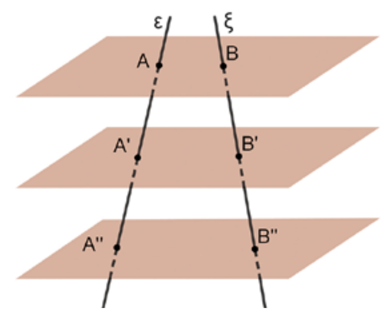
2. Τα Α, Β, Γ, Δ είναι τέσσερα σημεία που δεν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο. Το σχήμα που αποτελείται από τα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ λέγεται στρεβλό τετράπλευρο.



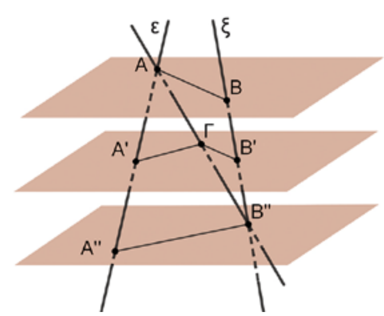
Να αποδείξετε ότι ΖΕ = ΗΘ και ΕΘ = ΖΗ.

3. Θεωρούμε τρία παράλληλα επίπεδα και μία ευθεία ε που τα τέμνει. Αν τα επίπεδα ορίζουν ίσα τμήματα στην ευθεία ε, τότε να αποδείξετε ότι τα επίπεδα αυτά ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία ξ που τέμνει τα επίπεδα.

1η περίπτωση αν οι ευθείες ε και ξ είναι ομοεπίπεδες.



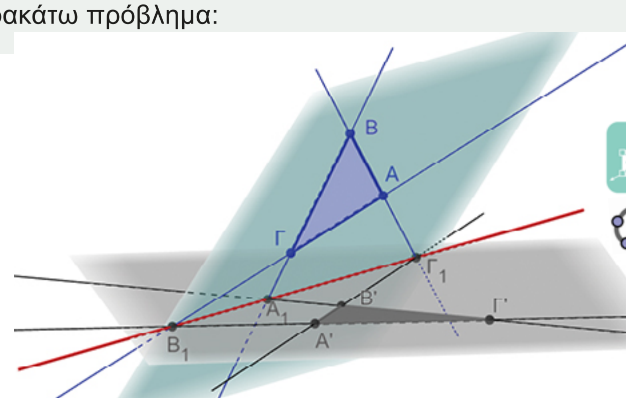
2η περίπτωση αν οι ευθείες ε και ξ είναι ασύμβατες.



Στιγμές από την ιστορία των μαθηματικών

Ο **Girard Desargues** (1591-1661) ήταν Γάλλος μαθηματικός και μηχανικός θεμελιωτής της λεγόμενης ***προβολικής γεωμετρίας***. Διατύπωσε το παρακάτω πρόβλημα:

4. Υποθέτουμε ότι δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' ανήκουν σε διαφορετικά επίπεδα, ώστε οι ευθείες ΑΒ και Α'Β' να τέμνονται στο $Γ_1$, οι ΒΓ και Β'Γ' να τέμνονται στο $Α_1$ και οι ΑΓ και Α'Γ' να τέμνονται στο $Β_1$. Μπορείτε να δικαιολογήσετε γιατί τα σημεία $Α_1$,$Β_1$,$Γ_1$ είναι συνευθειακά; (**Σημεία Desargues**)



6.2
Δίεδρες γωνίες

Τι καινούργιο υπάρχει στην ενότητα

Στις παρακάτω σελίδες:

- μαθαίνουμε πότε μια ευθεία θα λέγεται κάθετη σε ένα επίπεδο,
- ορίζουμε την απόσταση σημείου από επίπεδο,
- γνωρίζουμε το θεώρημα των τριών καθέτων,
- μελετάμε τη δίεδρη γωνία,
- υπολογίζουμε το μέτρο μιας δίεδρης γωνίας.

Απαραίτητες γνώσεις

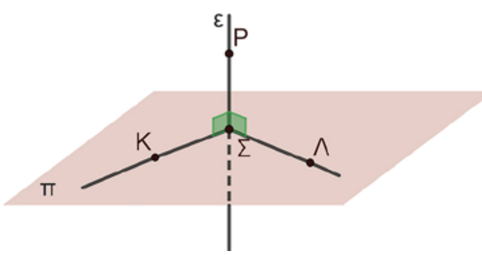
A) Καθετότητα ευθείας και επιπέδου

Όλα θα ξεκινήσουν με ένα βασικό σχήμα.

Παρατηρήστε το διπλανό σχήμα. (Σχ.9)

Έχουμε ένα επίπεδο π και ένα σημείο Ρ έξω από αυτό.

Ισχύει η παρακάτω πρόταση:



Σχήμα 9

Αν μία ευθεία είναι κάθετη σε δύο τεμνόμενες ευθείες ενός επιπέδου στο κοινό τους σημείο, τότε είναι κάθετη σε όλες τις ευθείες του επιπέδου που διέρχονται από αυτό.

Το σημείο Σ λέγεται **προβολή** του Ρ στο επίπεδο. Το επίπεδο π κάθετο επίπεδο της ε και το μήκος του ΡΣ λέγεται **απόσταση του σημείου Ρ από το επίπεδο π**.

B) Βασικές προτάσεις

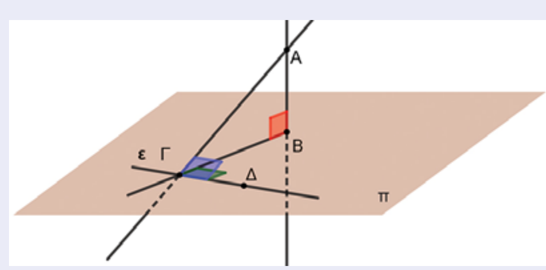
i. Δύο επίπεδα κάθετα στην ίδια ευθεία είναι παράλληλα μεταξύ τους.
ii. Δύο ευθείες κάθετες στο ίδιο επίπεδο είναι παράλληλες μεταξύ τους.
iii. Θεώρημα των τριών καθέτων. (Σχ.10)

Έστω επίπεδο π, μια ευθεία του ε και ένα σημείο Α έξω από αυτό, τότε ισχύουν οι προτάσεις:

1η πρόταση: Αν $ΑΒ \perp π$, $ΒΓ \perp ε$ τότε $ΑΓ \perp ε$.

2η πρόταση: Αν $ΑΒ \perp π$, $ΑΓ \perp ε$ τότε $ΒΓ \perp ε$.

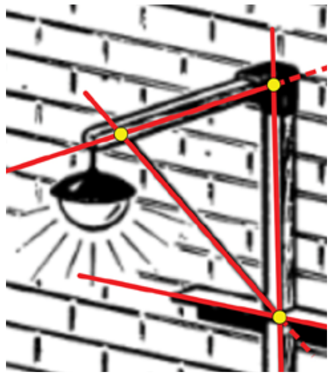
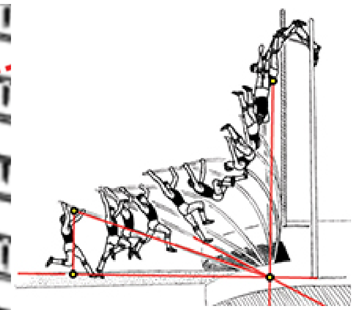
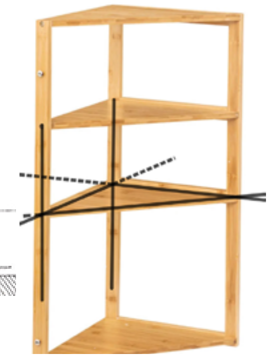
3η πρόταση: Αν $ΑΒ \perp ΒΓ$, $ΑΓ \perp ε$ και $ΒΓ \perp ε$, τότε $ΑΒ \perp π$, δηλαδή η ΑΒ είναι κάθετη σε κάθε ευθεία του επιπέδου που διέρχεται από το Β.



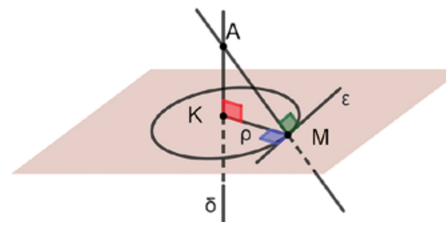
Σχήμα 10

Ερωτήσεις κατανόησης

1. Αναγνωρίστε το θεώρημα των τριών καθέτων στα διπλανά σχέδια.

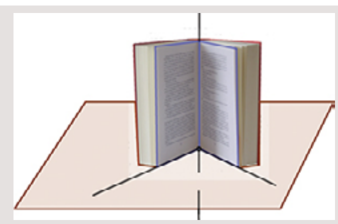
2. Στο επίπεδο θεωρούμε τον κύκλο (Κ,ρ) και τυχαίο σημείο του Μ. (Σχ.11) Θεωρούμε ευθεία δ κάθετη στο επίπεδο στο σημείο Κ και τυχαίο σημείο της Α. Γιατί η ΑΜ είναι κάθετη της εφαπτομένης ε του κύκλου στο σημείο Μ; Μπορείτε να ανακαλύψετε στο σχήμα αυτό τρία ζεύγη κάθετων ευθειών;



Σχήμα 11

Δραστηριότητα

Ανοίξτε το βιβλίο σας, όπως στη διπλανή εικόνα.
Ποιο αντίστοιχο γεωμετρικό μέγεθος της επιπεδομετρίας σας θυμίζει;
Ας απλοποιήσουμε την εικόνα.
Ποιες γεωμετρικές μορφές εμφανίζονται;
Πως μπορούμε να μετρήσουμε το άνοιγμα κάθε φορά του βιβλίου μας;



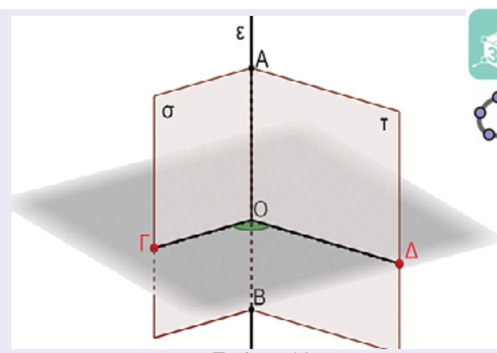
Ας δούμε τι έχει προκύψει

Γ) **Δίεδρη γωνία** λέγεται το σχήμα που αποτελείται από δύο ημιεπίπεδα - **έδρες** σ, τ με κοινή **ακμή** ε (η ευθεία τομή των δύο εδρών) και τη συμβολίζουμε με ε – (σ,τ). (Σχ.12)

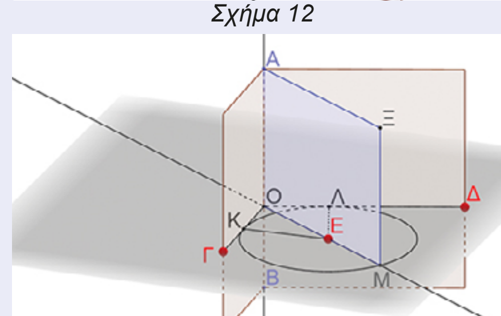
Η τομή μιας δίεδρης γωνίας με επίπεδο **κάθετο στην ακμή της δίεδρης** είναι μία επίπεδη γωνία στο κάθετο επίπεδο και λέγεται **αντίστοιχη επίπεδη γωνία της δίεδρης**. Ως **μέτρο της δίεδρης γωνίας** ορίζουμε το μέτρο της αντίστοιχης επίπεδης γωνίας.

Όπως στην επιπεδομετρία έχουμε τη διχοτόμο μιας γωνίας, έτσι και εδώ έχουμε το **διχοτόμο επίπεδο της δίεδρης γωνίας** (Σχ.13) και ορίζουμε:

Διχοτόμο επίπεδο μιας δίεδρης γωνίας ονομάζουμε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του εσωτερικού της δίεδρης που ισαπέχουν των εδρών της. Δηλαδή αν Ε σημείο του διχοτόμου επιπέδου και ΕΛ, ΕΚ κάθετα στα επίπεδα της δίεδρης τότε ΕΛ = ΕΚ.



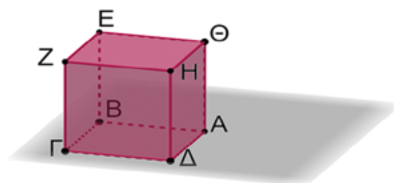
Σχήμα 12



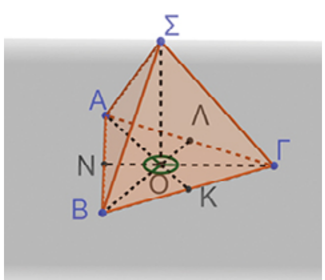
Σχήμα 13

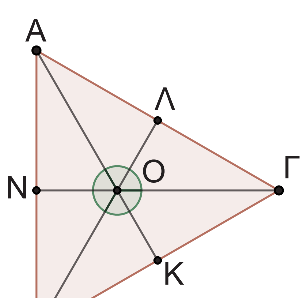
Ασκήσεις

1. Στον παρακάτω κύβο να βρείτε δύο δίεδρες γωνίες, τα επίπεδα από τα οποία σχηματίζονται και το μέτρο τους.



2. Στα παρακάτω σχήματα παρουσιάζεται μία κεραία ΣΟ που στηρίζεται κάθετα στο έδαφος με τη βοήθεια συρματόσχοινων ΣΑ, ΣΒ και ΣΓ ίδιου μήκους. Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο και το σημείο Ο είναι το σημείο τομής των διαμέσων ΑΚ, ΒΛ και ΓΝ του ΑΒΓ.





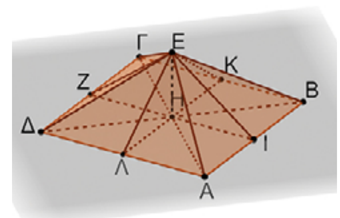
α) Βρείτε το μέτρο της δίεδρης γωνίας:

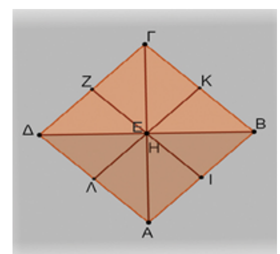
i. Που σχηματίζεται από τα επίπεδα ΑΟΣ και ΒΟΣ.

ii. Που σχηματίζεται από τα επίπεδα ΑΟΣ και ΝΟΣ.

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι $2ON = \Sigma N$, ποια η αντίστοιχη επίπεδη γωνία της δίεδρης που σχηματίζουν τα επίπεδα ΣΑΒ και ΑΒΓ ;

3. Στα παρακάτω σχήματα παρουσιάζονται η στέγη ενός σπιτιού και η κάτοψή της. Είναι γνωστό ότι η βάση ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο κέντρου Η και η κορυφή Ε είναι σε τέτοια θέση, ώστε η ΕΗ να είναι κάθετη στη βάση ΑΒΓΔ.





Επίσης, η στέγη έχει σχεδιαστεί έτσι ώστε το δοκάρι ΕΗ να είναι το μισό του ΕΖ. Αν τα σημεία Ζ, Λ, Ι και Κ είναι τα μέσα των πλευρών της βάσης, να βρείτε το μέτρο της δίεδρης γωνίας που σχηματίζουν τα επίπεδα:

α) ΕΓΗ και ΔΕΗ,

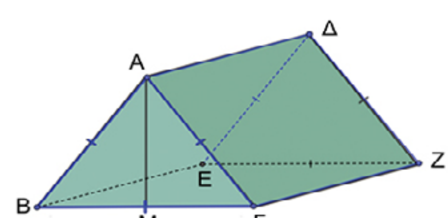
β) ΔΓΕ και ΑΒΓΔ,

γ) ΗΕΙ και ΗΕΑ.

4. Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται μία σκηνή. Οι επιφάνειες ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ισόπλευρα τρίγωνα και οι επιφάνειες ΑΔΕΒ και ΑΔΖΓ ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Η βάση ΒΕΖΓ της σκηνής είναι και αυτή σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Να βρείτε το μέτρο των δίεδρων γωνιών που σχηματίζονται από τα επίπεδα:

α) ΑΒΓ και ΒΕΖΓ, **β)** ΑΒΓ και ΑΔΕΒ,

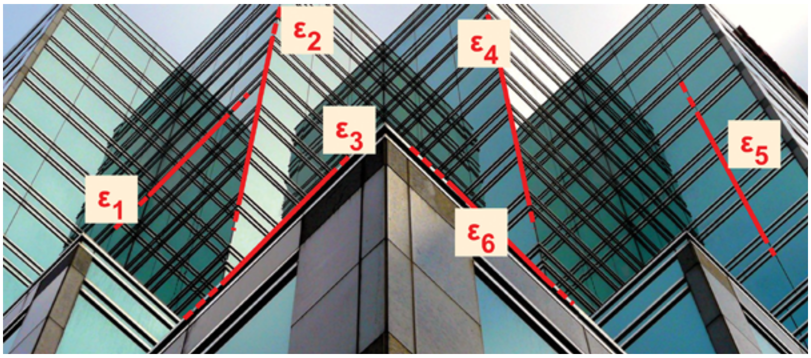
γ) ΑΔΖΓ και ΒΕΖΓ.

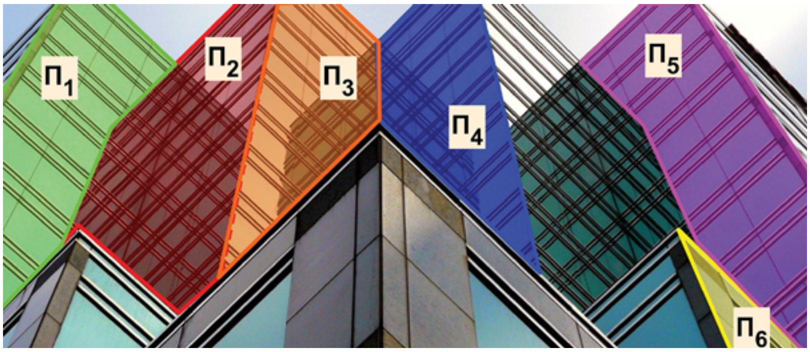


ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΦΥΛΛΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Ερώτηση θεωρίας (μονάδες 7)

Στις διπλανές εικόνες έχουν σημειωθεί οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$ και τα επίπεδα $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, \Pi_6$.





Να αναφέρετε:

Δύο ασύμβατες ορθογώνιες ευθείες.

Δύο ομοεπίπεδες παράλληλες ευθείες.

Δύο ομοεπίπεδες κάθετες ευθείες.

Δύο ομοεπίπεδες τεμνόμενες ευθείες.

Δύο παράλληλα επίπεδα.

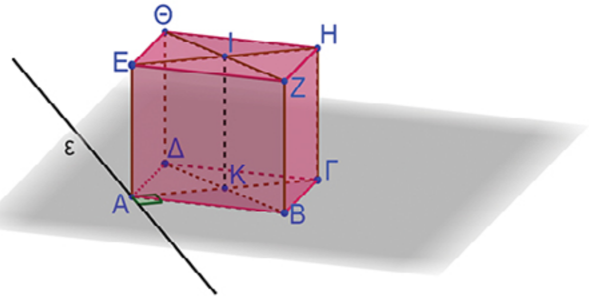
Δύο κάθετα επίπεδα.

Μία δίεδρη γωνία, την κοινή ακμή της και το μέτρο της γωνίας.

Άσκηση (μονάδες: 7+3+3=13)

Στο διπλανό κουτί (ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο) είναι: ΑΒΖΕ τετράγωνο πλευράς α και το ΒΓΗΖ ορθογώνιο διαστάσεων α και β.

Δίνεται επίσης ότι $ΒΓ = \frac{ΑΓ}{2}$.



α) Να βρείτε την αντίστοιχη επίπεδη γωνία της δίεδρης που σχηματίζουν τα επίπεδα ΕΘΗΖ και ΕΘΔΑ.

β) Να βρείτε την αντίστοιχη επίπεδη γωνία της δίεδρης που σχηματίζουν τα επίπεδα ΙΗΓΚ και ΙΖΒΚ.

γ) Αν ε ευθεία του επιπέδου ΑΒΓΔ τέτοια ώστε $ε \perp ΑΓ$, να δικαιολογήσετε γιατί οι ευθείες ΙΑ και ε είναι κάθετες μεταξύ τους.

ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Ενότητα 1.1

Α. Ερωτήσεις κατανόησης

1α. Αποδείξτε ότι $x=\hat{A}$.

1β. Αποδείξτε ότι $y=36^\circ$.

1γ. Κάθετες ευθείες στην ίδια ευθεία.

2. Παράλληλες ευθείες, κάθετες στην ίδια ευθεία.

3. Οι εντός και επί τα αυτά γωνίες είναι παραπληρωματικές.

4. Εντός και επί τα αυτά θα είναι παραπληρωματικές, $\hat{\omega}=144^\circ$.

5. Γωνίες παραπληρωματικές ως εντός εκτός και εναλλάξ $\beta=70^\circ$.

6. Παραπληρωματικές γωνίες $\varphi=55^\circ$.

7. $A\hat{\Gamma}B=40^\circ$ εντός εναλλάξ της $x\hat{A}\Gamma$.

Β. Ασκήσεις (σελ 18)

1. Γωνίες εντός και επί τα αυτά, $\hat{\alpha}=30^\circ$, $\hat{\beta}=20^\circ$.

2. Οι γωνίες και $B\hat{\Gamma}Z$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά. Οι γωνίες $E\hat{\Delta}\Gamma$ και $\Delta\hat{\Gamma}Z$ είναι παραπληρωματικές, τελικά ότι $x=15^\circ$, $y=10^\circ$.

3. ΒΓ||ΔΕ εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες ίσες με 120°.

4. $\hat{B}_1=\omega$, $\hat{B}_2=\varphi$ ως εντός εναλλάξ και $\hat{B}_1+\hat{B}_2=\theta$.

5. $x\hat{A}\Gamma=\theta$, $\hat{A}_1=\omega$ ως εντός εναλλάξ και $x\hat{A}\Gamma-\hat{A}_1=\varphi$

6. Οι διχοτόμοι τεμνόμενες από την ΑΒ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.

7. $\hat{\Gamma}_1+\delta=180^\circ$, $\hat{\Gamma}_2+\hat{B}_2=180^\circ$ και $\hat{B}_1+\alpha=180^\circ$ ως εντός και επί τα αυτά γωνίες. Προσθέστε τις ισότητες κατά μέλη, $\alpha+\beta+\gamma+\delta=540^\circ$.

8. Φέρνουμε ευθεία ε που διέρχεται από το σημείο Β και είναι παράλληλη της Γy. Οπότε τελικά ε||/Γy, ε||Ax, άρα θα είναι και Ax||Γy.

9. Φέρουμε ευθεία ε τέτοια ώστε ε||Bz||Ax||Γy. Τελικά $\omega=180^\circ-30^\circ-45^\circ=105^\circ$.

Ενότητα 1.2

Ερωτήσεις κατανόησης (σελ 26)

1. Θα πρέπει $(\nu-2)\cdot180^\circ=1800^\circ$, 12-γωνο.

2. Θα πρέπει $(\nu-2)\cdot180^\circ=360^\circ$, τυχαίο τετράπλευρο.

3. $B\hat{I}\Gamma=180^\circ-\dfrac{\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2}=180^\circ-\dfrac{180^\circ-70^\circ}{2}=125^\circ$

4. Αν τέμνονται κάθετα στο Ι τότε
$\dfrac{\hat{B}}{2}+\dfrac{\hat{\Gamma}}{2}=90^\circ \Leftrightarrow \hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ$, άτοπο.

5. Εντός εναλλάξ γωνίες, $\hat{A}=60^\circ$.

6. Άθροισμα γωνιών τετράπλευρου 360°, x=60°.

7. Παρατηρήστε την εξωτερική γωνία τριγώνου, x=40°

Ασκήσεις (σελ 27)

1. Αν Ζ το σημείο τομής των ΒΕ, ΓΔ, τότε στο τρίγωνο ΓΕΖ η $\hat{Z}=115^\circ$ είναι εξωτερική γωνία, $\alpha=80^\circ$.
Το ΑΔΓ είναι ορθογώνιο, $\hat{\omega}=55^\circ$.
Στο ΕΑΒ η α είναι εξωτερική γωνία, $\beta=25^\circ$.

2. $\hat{E}_1=B\hat{A}E \Leftrightarrow \hat{E}_1=30^\circ$ (γωνίες εντός εναλλάξ)
$B\hat{A}\Delta=\Gamma\hat{B}A \Leftrightarrow 30^\circ+\Delta\hat{A}E=100^\circ \Leftrightarrow \Delta\hat{A}E=70^\circ$
(γωνίες εντός εναλλάξ)
Στο τρίγωνο ΑΔΕ $\hat{\Delta}=180^\circ-\Delta\hat{A}E-\hat{E} \Leftrightarrow \hat{\Delta}=80^\circ$.

3. Άθροισμα γωνιών τριγώνου 180°, $x=40^\circ$,
$\hat{E}_1=y=60^\circ$ (κατακορυφήν), $z=120^\circ$
παραπληρωματική της y.

4. Όμοια με την προηγούμενη $x=18^\circ$.

5. Οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες.

6. Παρατηρήστε ότι στο ΑΔΒ η $A\hat{\Delta}\Gamma$ εξωτερική, στο ΑΔΓ η $A\hat{\Delta}B$ εξωτερική.

7. Στο ΖΑΔ είναι $A\hat{Z}\Delta=180^\circ-(Z\hat{A}B+\hat{A})-A\hat{\Delta}Z$.
$A\hat{\Delta}Z=\dfrac{\hat{\Gamma}}{2}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά και
$Z\hat{A}B=\dfrac{\hat{A}_{\varepsilon\xi}}{2}=\dfrac{\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2}$.

8. α) Στο ΑΔΕ είναι $\Delta\hat{A}E=90^\circ-A\hat{E}\Delta$. Στο ΑΕΓ η γωνία $A\hat{E}\Delta$ είναι εξωτερική. Στο ΑΒΓ είναι $180^\circ-\hat{A}=\hat{B}+\hat{\Gamma}$
β) Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

9. Ισχύουν $A\hat{E}B=180^\circ-\dfrac{\hat{A}}{2}-\dfrac{\hat{B}}{2}$ και $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}=360^\circ$

10. Στο ΙΚΖ η $Z\hat{I}E$ είναι εξωτερική. Στο ΑΚΕ η $Z\hat{K}E$ είναι εξωτερική.

11. Έστω ότι έχει τέσσερεις, τότε
$\hat{A}_{\varepsilon\xi}+\hat{B}_{\varepsilon\xi}+\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}+\hat{\Delta}_{\varepsilon\xi}>4\cdot90^\circ=360^\circ$, άτοπο.

12. Ονομάστε ω τις ίσες γωνίες του ν-γώνου. Χρησιμοποιείστε τον τύπο του αθροίσματος γωνιών ν-γώνου $\Sigma_\nu=(\nu-2)\cdot180^\circ$, $\hat{\omega}=150^\circ$, $\nu=12$

13. Έστω ν το πλήθος των γωνιών του πολυγώνου και ω η γωνία που εξαιρείται. Θα είναι:
$2190^\circ+\omega=(\nu-2)\cdot180^\circ \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$
$2550^\circ+\omega=180^\circ\cdot\nu \Leftrightarrow \omega=180^\circ\cdot\nu-2550^\circ$
$0^\circ<\omega<180^\circ \Leftrightarrow 0^\circ<180^\circ\cdot\nu-2550^\circ<180^\circ \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$
$14{,}16\ldots<\nu<15{,}16\ldots \overset{\nu\in\mathbb{N}}{\Leftrightarrow} \nu=15$

Φύλλο αυτοαξιολόγησης (σελ 32)

Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους

(1-Λ) - (2-Σ) - (3-Σ) - (4-Σ) - (5-Λ)

Άσκηση 1η

Στο ΚΕΓ είναι $\omega=90^\circ-\dfrac{\hat{\Gamma}}{2}=\dfrac{180^\circ-\hat{\Gamma}}{2}=\dfrac{\hat{A}+\hat{B}}{2}$

Άσκηση 2η

Ισχύουν: $\hat{\Gamma}_2=\hat{\Gamma}-\hat{\Gamma}_1$, $\hat{\Gamma}=90-\dfrac{\hat{A}}{2}$, $\hat{\Gamma}_1=90^\circ-\dfrac{90^\circ+\hat{A}}{2}$ …

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ενότητα 2.1

Α. Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους (σελ 37)

1	2	3	4	5
Λ	Λ	Λ	Λ	Σ

Ερωτήσεις κατανόησης (σελ 43)

1. x = 30° **2.** 60°
3. Άθροισμα γωνιών τριγώνου 360°.
4. Ισοσκελές διότι η διχοτόμος του είναι και ύψος
5. Είναι ίσα **6.** Όχι
7. Μόνο το ύψος από την κορυφή του είναι και
8. Μόνο όταν έχουν την βάση τους και μία από τις ίσες πλευρές.

Ασκήσεις (σελ 44)

1. α) Παρατηρήστε ότι τα τρίγωνα ΚΑΒ και ΚΓΔ είναι ισοσκελή, $K\hat{A}B=K\hat{B}A=K\hat{\Gamma}\Delta=K\hat{\Delta}\Gamma=65^\circ$.
β) Από (Α) σχηματίζονται ίσες εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες

2. $\hat{\beta}+50^\circ=90^\circ \Leftrightarrow \hat{\beta}=40^\circ$.
Επίσης οι β και δ είναι ίσες ως εντός εναλλάξ. Άρα $\hat{\gamma}=40^\circ$.

3. Οι παρά τη βάση γωνίες ενός εκ των τριών ισοσκελών είναι 30°.

4. α) $\dfrac{\hat{A}}{2}=\hat{\Gamma}$, Β) Στο ισοσκελές ΑΒΓ η ΒΟ είναι διχοτόμος άρα θα είναι και ύψος.

5. Έστω $\hat{\Gamma}=x$, τότε $\hat{B}=2x$ εξωτερική του ισοσκελούς ΒΔΕ.

6. Το ΑΒΔ είναι ισοσκελές με γωνία 60°, τότε ισόπλευρο, οπότε ΒΓΔ ισοσκελές $\omega=140^\circ$.

7. Δείξτε ότι το ΒΕΖ είναι ορθογώνιο. Η $\hat{A}$ του ΑΒΓ είναι εξωτερική του ΑΔΕ.

8. Δείξτε ότι $\Delta\hat{A}E=180^\circ$. Η $\hat{B}$ του ΑΒΓ είναι εξωτερική του ισοσκελούς ΑΒΔ.
Στο ισοσκελές ΑΓΕ θα ισχύει $\Gamma\hat{A}E=90^\circ-\dfrac{A\hat{\Gamma}E}{2}$.

9. Στο ΑΔΜ είναι $\hat{M}=180^\circ-\hat{\Delta}-\dfrac{\hat{A}}{2}$, στο ΒΛΓ είναι

$\hat{\Lambda}=180^\circ-\hat{\Gamma}-\dfrac{\hat{B}}{2}$, στο ΑΚΒ είναι

$A\hat{K}B=180^\circ-\dfrac{\hat{A}}{2}-\dfrac{\hat{B}}{2}$

Η $A\hat{K}B=\Lambda\hat{K}M$ ως κατακορυφήν

10. Στο ΔΒΖ η $A\hat{\Delta}Z$ εξωτερική, τότε β+60° =χ+α , στο ΖΕΓ η $E\hat{Z}B$ εξωτερική, τότε α+60°=γ+χ. Αφαιρέστε κατά μέλη.

11. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρε τμήμα ΑΔ (Δ σημείο ΒΓ). Υπάρχουν 4 δυνατές περιπτώσεις:
Το ΑΒΔ ισοσκελές με κορυφή την Α και το ΑΔΓ ισοσκελές με κορυφή τη Δ, δηλ. $\hat{B}=2\hat{\Gamma}$
Το ΑΒΔ ισοσκελές με κορυφή την Δ και το ΑΔΓ ισοσκελές με κορυφή τη Δ, δηλ. $\hat{B}+\hat{\Gamma}=90^\circ$
Το ΑΒΔ ισοσκελές με κορυφή την Β και το ΑΔΓ ισοσκελές με κορυφή τη Δ, δηλ. $\hat{A}=3\hat{\Gamma}$
Το ΑΒΔ ισοσκελές με κορυφή την Δ και το ΑΔΓ ισοσκελές με κορυφή τη Α, δηλ $\hat{\Gamma}=2\hat{B}$

Ασκήσεις και Προβλήματα (σελ 48)

1. Σύγκρινε τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΔΟΓ.
2. Σύγκρινε τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ.
3. Σύγκρινε τα τρίγωνα ΒΑΓ και ΕΜΔ. Οι εντός εναλλάξ γωνίες των ΕΔ και ΑΓ τεμνόμενων από την ΕΓ είναι ίσες.
4. 1. Σύγκρινε τα ΑΚΓ και ΑΒΛ.
2. Σύγκρινε τα ΒΚΜ και ΛΝΓ.
5. Για το Ορθό, σύγκρινε τα τρίγωνα ΒΚΓ και ΒΛΓ. Για το Αντίστροφο, σύγκρινε τα ΑΒΚ και ΑΛΓ.
6. Σύγκρινε τα ΒΑΔ και ΑΓΕ.
7. α) Σύγκρινε τα τρίγωνα ΔΒΖ και ΓΗΕ. Β) Σύγκρινε τα τρίγωνα ΑΖΓ και ΑΒΗ.
8. Στο ΔΕΖ υπολόγισε ότι $\hat{\Delta}=45^\circ$. Σύγκρινε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ.
9. α) Σύγκρινε τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΑΟΓ.
β, γ) Στα ισοσκελή ΑΒΓ και ΒΟΓ η διχοτόμος από την κορυφή είναι και ύψος κι αντιστρόφως.
10. Σύγκρινε τα τρίγωνα ΑΔΓ και Α΄Δ΄Γ΄.
Σύγκρινε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄.
11. Σύγκρινε τα τρίγωνα ΑΒΜ και Α΄Β΄Μ΄. Σύγκρινε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ.
12. α) Σύγκρινε τα τρίγωνα ΑΓΕ και ΑΒΔ.
β) Η $B\hat{Z}E$ είναι εξωτερική στο ΖΔΕ $B\hat{Z}E=120^\circ$.
13. α) Κριτήριο ορθογώνιων τριγώνων.
β) Σύγκρινε τα τρίγωνα ΑΘΓ και ΓΗΕ.
Ο δρόμος θα πρέπει να περάσει από το μέσο της απόστασης Κρηστώνη – Πεδινό και Άγιοι Απόστολοι Κρηστώνη. Υπάρχουν τρεις λύσεις.
14. Σύγκρινε τα τρίγωνα ΓΟΒ και ΔΟΑ. Αν Μ το σημείο τομής των ΑΔ και ΟΒ, δείξε ότι $M\hat{E}B=90^\circ$
15. Σύγκρινε τα τρίγωνα ΔΒΓ και ΔΕΖ.
Σύγκρινε τα τρίγωνα ΕΔΗ και ΔΑΒ.
16. Σύγκρινε τα τρίγωνα ΓΕΖ και ΑΓΒ. ($E\hat{\Gamma}Z=A\hat{\Gamma}B$ ως διαφορές ίσων γωνιών).
17. Είναι $ZE=\Delta\Gamma=x$, άρα $\Delta E=x+24$, και
$A\Gamma=\Delta E \Leftrightarrow \Gamma E+14=x+24 \Leftrightarrow \Gamma E=x+10 \quad x=30$
18. α) Δείξε ότι $A\hat{E}Z=A\hat{Z}E$. β) Εφαρμογή κριτηρίου ΓΠΓ. **Γ)** $Z\Gamma=A\Gamma-AZ$, $BE=AB+AE$
19. α) Ορθό: Σύγκρινε τα τρίγωνα ΑΚΜ και ΜΛΓ.
Σύγκρινε τα τρίγωνα ΑΚΜ και ΒΚΛ.
β) Αντίστροφο: Τα τρίγωνα ΑΚΜ, ΜΛΓ, ΒΚΛ είναι ίσα.
20. Σύγκρινε τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΔΓΒ. Σύγκρινε τα τρίγωνα ΑΚΔ και ΚΒΓ.
21. Σύγκρινε τα τρίγωνα ΑΔΜ και Α΄Δ΄Μ΄.
Σύγκρινε τα τρίγωνα ΑΜΒ και Α΄Μ΄Β΄.
Σύγκρινε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄.

22. α) Εφαρμόστε κριτήριο ΠΓΠ β) Εφαρμόστε κριτήριο ΓΠΓ γ) Σύγκρινε τα ΟΚΒ΄ και ΟΚΒ.

23. α) Δείξε ότι τα τρίγωνα ΜΚΒ, ΜΛΒ και ΚΜΛ είναι ίσα μεταξύ τους.

Ενότητα 2.2

Ασκήσεις (σελ 57)

1. Στη θέση Σ (σημείο τομής της μεσοκαθέτου του ΑΒ με την γραμμή του τραίνου).

2. Φέρε την ΟΜ κάθετη στην ΑΒ.

3. Το μέσο Μ της υποτείνουσας πρέπει να ανήκει στη διχοτόμο της ορθής γωνίας. Ορθογώνιο και ισοσκελές.

4. Τα σημεία Γ και Α ισαπέχουν από τα Ζ, Ε.

5. α) Το σημείο Δ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΓ οπότε θα ισαπέχει από τα άκρα Α και Γ του ΑΓ
β) Σύγκρινε τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ.

6. Δείξε ότι ΒΖΓ ισοσκελές. Σύγκρινε τα ΑΒΖ και ΓΖΔ.

7. α) Δείξε ότι ΔΒ=ΔΓ. β) Εφάρμοσε κριτήριο ΠΓΠ.
Γ) Προκύπτει από το (Β)

8. Σύγκρινε τα ΑΒΔ και ΒΔΕ και τα ΖΔΑ και ΔΓΕ.

9. α) Σύγκρινε τα ΑΒΓ και ΑΕΔ. β) Το σημείο Α ισαπέχει των πλευρών της γωνίας $B\hat{M}E$

10. α) Υπολόγισε τις γωνίες των ισοσκελών τριγώνων ΑΒΓ και ΒΔΕ. Η ΔΕΒ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΔΕΓ...
β) $ΒΔ + ΔΑ = ΒΓ \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow ΔΑ = ΔΕ$. Φέρε ΔΛ και ΔΚ τις αποστάσεις του Δ από τις πλευρές της γωνίας $\hat{B}$
Σύγκρινε τα ΑΔΛ και ΚΔΕ

11. Πρόκειται για τη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

12. Πρόκειται για τον κύκλο (Μ,λ) όπου Μ το μέσο του ΑΒ και λ το σταθερό μήκος της διαμέσου.

13. α) Σύγκρινε τα ΒΕΔ και ΔΖΓ .
β) Δείξε ότι το ΑΒΚ είναι ισοσκελές.Το Δ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΒΚ και του ΒΓ.

14. Δείξε ότι το ΑΖΒ είναι ισόπλευρο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ενότητα 3.1

Ασκήσεις (σελ 66)

1. Είναι $α = 60^\circ$, $x + y + 30^\circ = 180^\circ$ και η γωνία x είναι εντός εναλλάξ με την $Γ\hat{A}Δ$, ΑΒ < ΓΒ < ΑΓ.

Α	Β	Γ	Δ	Ε
1	3	4	2	5
R-ρ<δ<R+ρ	δ=R-ρ	δ>R+ρ	δ=R+ρ	δ<R-ρ

2. Το ΑΡΒ είναι ισοσκελές, αφού ΡΜ μεσοκάθετος του ΑΒ. Στο ορθογώνιο ΡΓΑ η ΡΑ υποτείνουσα

3. Στο ΑΒΜ ισχύει ότι ΑΜ + ΒΜ > ΑΒ.
Στο ΑΜΓ ισχύει ΑΜ + ΜΓ > ΑΓ.

4. Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές αφού το ύψος του από το Α είναι και διχοτόμος. Η ΑΜ μεσοκάθετος του ΒΔ. Εφαρμογή τριγωνικής ανισότητας στο ΜΔΓ.

5. Στο ΑΜΒ έχουμε από υπόθεση ΑΜ>ΒΜ άρα $\hat{B} > B\hat{A}M$. Όμοια στο ΑΜΓ.
Αν $AM < \frac{ΒΓ}{2}$, τότε $\hat{B} + \hat{Γ} < \hat{A}$. Αν $AM = \frac{ΒΓ}{2}$, τότε τα ΑΒΜ και ΑΜΓ είναι ισοσκελή.

6. α) Θεώρημα εξωτερικής.
β) Στο ΑΒΔ τριγωνική ανισότητα.

7. α) Σύγκρινε τα ΑΒΜ και ΜΓΔ.
β) Στο ΑΓΔ απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται ομοιοτρόπως άνισες γωνίες.
γ) Στο τρίγωνο ΑΔΓ τριγωνική ανισότητα.

8. Έστω σημείο Ε της ΑΓ ώστε ΑΒ = ΑΕ. Σύγκρινε τα ΑΒΔ και ΑΔΕ. Αρκεί να δείξεις ότι ΔΕ < ΔΓ ή ισοδύναμα $Δ\hat{E}Γ > \hat{Γ}$. Είναι $Δ\hat{E}Γ = \hat{B}_{εξ}$ ως εξωτερικές γωνίες ίσων γωνιών ίσων τριγώνων.

9. α) Στα ορθογώνια ΕΒΗ, ΗΔΓ οι ΒΗ, ΗΓ είναι υποτείνουσες. β) Τριγωνική ανισότητα στο ΕΗΔ ...
Πρόσθεσε κατά μέλη τις σχέσεις που προκύπτουν

10. α) Το Δ είναι σημείο της διχοτόμου. Επίσης στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΛΔ η ΒΔ είναι υποτείνουσα οπότε ΒΔ>ΔΛ, άρα ΒΔ>ΔΚ. Όμοια προκύπτει ΔΛ<ΔΓ. β) Τριγωνική ανισότητα στο ΔΛΚ.

11. α) Τριγωνική ανισότητα στα ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΔΟΓ, ΑΟΔ και πρόσθεση των σχέσεων κατά μέλη,
β) Τριγωνική ανισότητα στα ΑΟΓ, ΔΟΒ
γ) Όταν το Ο ταυτιστεί με το σημείο τομής των διαγώνιων ΑΓ και ΒΔ του ΑΒΓΔ.

12. Τριγωνική ανισότητα στα ΓΟΔ , ΔΟΑ, ΑΟΒ, ΒΟΓ.

13. Εφαρμόστε τις οδηγίες της άσκησης.

14. Η ΜΟ είναι μεσοκάθετος του ΑΑ΄ ομοίως και η ΜΣ. Τριγωνική ανισότητα στο Α΄ΒΣ

Ενότητα 3.2

Ασκήσεις (σελ 71)

1. Δείξε ότι Μ μέσο και του ΓΔ.

2. Φέρε τα αποστήματα ΚΕ και ΛΖ και σύγκρινε τα ΜΚΕ και ΜΖΛ. Εφάρμοσέ το: σε ίσους κύκλους σε ίσα αποστήματα αντιστοιχούν ίσες χορδές

3. α) Φέρε τα αποστήματα ΟΚ και ΟΛ.
β) Σύγκρινε τα ΟΚΣ και ΟΛΣ.
γ) Τα Σ, Ο είναι σημεία που το καθένα ισαπέχει από τα άκρα του ΑΔ.

4. Φέρε την ΚΜ. Υπέθεσε ότι ΑΒ>ΒΓ τότε και ΒΚ>ΒΜ οπότε στο τρίγωνο ΚΒΜ θα είναι $B\hat{M}K > B\hat{K}M$. Τα αποστήματα ΟΚ, ΟΜ είναι κάθετα στις χορδές.

Ενότητα 3.3

Ερωτήσεις κατανόησης (σελ 76)

1. 18 μονάδες μήκους

2. Οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες μεταξύ τους γιατί είναι κάθετες στην ίδια ευθεία ΑΒ.

3. Ναι διέρχεται. Το ΟΑΒ είναι ισοσκελές.

4. Ναι. Το ΟΑΒ είναι ισοσκελές.

5. Ναι. Τα σημεία Ο και Κ ισαπέχουν των άκρων Α και Β του τμήματος ΑΒ.

6.

Α	Β	Γ	Δ	Ε
R–ρ<δ<R+ρ	δ=R–ρ	δ>R+ρ	δ=R+ρ	δ<R–ρ

Ασκήσεις (σελ 77)

1. Ονομάστε ΑΚ=χ , ΒΜ=ψ και ΓΛ=ζ τότε
$χ + ψ = 6$, $χ + ζ = 7$, $ψ + ζ = 5$.

2. α) Οι εφαπτόμενες είναι κάθετες στην ίδια ευθεία ΑΒ, άρα είναι παράλληλες μεταξύ τους.
β, γ) Έστω Κ το σημείο επαφής της εφαπτομένης ΓΔ, τότε ΓΚ, ΓΑ εφαπτόμενα τμήματα, ΔΚ, ΔΒ εφαπτόμενα τμήματα. Η ΟΓ διχοτόμος της $A\hat{O}K$, η ΟΔ διχοτόμος της $B\hat{O}K$.
3. Εφαπτόμενα τμήματα ΚΑ, ΚΒ και ΚΟ διχοτόμος. Εφαπτόμενα τμήματα ΛΓ, ΛΒ.
4. ΡΑ, ΡΒ εφαπτόμενα τμήματα και ΡΚ διχοτόμος της $A\hat{P}B$. ΡΔ, ΡΓ εφαπτόμενα τμήματα και ΡΛ διχοτόμος της $\Gamma\hat{P}\Delta$.
5. Φέρε τις ακτίνες στα σημεία επαφής των εφαπτομένων του μικρού κύκλου. Αυτές είναι αποστήματα στις χορδές του μεγάλου.
6. Είναι ΣΒ=ΣΔ και ΣΑ=ΣΒ ως εφαπτόμενα τμήματα. Αφαίρεσε κατά μέλη. Τα Ο και Κ ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας $\hat{\Sigma}$.
7. ΡΑ=ΡΒ, ΔΕ=ΔΒ και ΓΑ=ΓΕ ως εφαπτόμενα τμήματα.
8. α, β) ΓΑ=ΓΔ, ΓΔ=ΓΒ ως εφαπτόμενα τμήματα. ΓΚ διχοτόμος της $A\hat{\Gamma}\Delta$, ΓΛ διχοτόμος της $\Delta\hat{\Gamma}B$, γ) Στα ορθ. ΑΚΓ και ΓΛΒ: ΚΓ>ΓΑ και ΓΛ>ΓΒ, δ) Τριγωνική ανισότητα στο ΑΔΒ και 2ΓΔ=ΑΒ.
9. Ισχύει ότι: ΚΛ + ΛΜ + ΚΜ =
= (ΚΑ-ΛΑ)+(ΛΒ+ΒΜ)+(ΚΓ-ΜΓ)=R-ρ+ρ+r+R-r=2R.

Επαναληπτικό φύλλο αυτοαξιολόγησης (σελ 80)

Ερωτήσεις θεωρίας – Κατανόησης

1. 13 cm **2.** 16 μονάδες μήκους **3.** 3 εφαπτόμενες

Άσκηση 1η : Εφάρμοσε την τριγωνική ανισότητα στα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ και ΒΔΓ τότε ΑΒ<ΑΔ+ΔΒ (1), ΑΓ<ΑΔ+ΔΓ (2) , ΒΓ<ΒΔ+ΔΓ (3). Άρα η περίμετρος του ΑΒΓ δεν μπορεί να είναι ίση με 19.

Άσκηση 2η : Φέρε το απόστημα ΟΚ της ΓΔ. Ανισοτικές σχέσεις στο ΟΚΜ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ενότητα 4.1

Ασκήσεις (σελ 85)

1. Σύγκρινε τα ΑΚΕ και ΗΖΓ και τα ΔΚΗ και ΕΒΖ. Δείξε ότι το ΑΕΓΗ είναι παραλληλόγραμμο.
2. Σύγκρινε τα ΑΕΒ, ΔΖΓ ($A\hat{B}E = \Gamma\hat{\Delta}Z$ οξείες γωνίες με πλευρές παράλληλες) και τα ΑΕΔ και ΒΖΓ.
3. Δείξε ότι τα ΑΒΔΓ και ΑΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμα.
4. Δείξε ότι $B\hat{O}K + \Gamma\hat{K}O = 180^\circ$
5. Δείξε ότι $Z\hat{\Gamma}B + B\hat{\Gamma}E = 90^\circ$. Τα τρίγωνα ΖΔΓ και ΓΒΕ είναι ισοσκελή.
6. Δείξε ότι τα ΣΒΣ΄Β΄, ΒΑΒ΄Α΄ είναι παραλληλόγραμμα.
7. α) Δείξε ότι τα ΑΒΚΜ, ΛΓΔΜ είναι παραλληλόγραμμο και ΑΜ=ΜΔ.
β) Οι διαγώνιοι παραλληλογράμμου διχοτομούνται και Ν μέσο της ΒΓ.
γ) Δείξε ότι το ΚΜΛ είναι ισοσκελές.
δ) Στο ΚΛΜ είναι $N\hat{\Lambda}M = 90^\circ - \frac{K\hat{M}\Lambda}{2}$.
8. Προέκτεινε την ΑΕ κατά ΕΔ=ΑΕ. Δείξε ότι το ΑΜΔΒ είναι παραλληλόγραμμο. Σύγκρινε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΓ.
9. Δείξε ότι ΔΕΘΓ παραλληλόγραμμο και ότι τα τρίγωνα ΑΔΘ, ΘΓΒ και ΑΕΒ είναι ίσα.

Ενότητα 4.2

Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους (σελ 91)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Λ	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ	Σ	Σ	Λ	Σ

Ασκήσεις (σελ 92)

1. $x = 15^\circ$, $\omega = 75^\circ$
2. α) Κριτήριο παραλληλογράμμου,
β) Ιδιότητες παραλληλογράμμου,
γ) Οι διαγώνιοι παραλληλογράμμου διχοτομούνται.
3. Οι διχοτόμοι των εντός και επί τα αυτά γωνιών τέμνονται κάθετα.
4. Δείξε ότι τα ΑΕΓΖ, ΕΔΖΒ είναι παραλληλόγραμμα.
5. Δείξε ότι $\Gamma\hat{Z}B = Z\hat{B}E + \Gamma\hat{B}E$.
6. Δείξε ότι τα ΔΕΓ, ΔΖΓ είναι ορθογώνια και ισοσκελή.
7. α) $\Gamma\hat{B}E = 90^\circ - A\hat{B}\Gamma$, β) Σύγκρινε τα τρίγωνα ΘΒΕ, ΔΑΒ, γ) Σχέσεις γωνιών στο ΕΒΟ.
8. α) Σύγκρινε τα ΑΔΛ, ΑΚΒ.
β) Στο ΟΑΚ δείξε $O\hat{K}A + O\hat{A}K = 90^\circ$.
9. α) Σύγκρινε τα ΗΑΔ και ΑΕΒ. β) Αν Ο το σημείο τομής των ΒΚ και ΑΔ, δείξε ότι το ΟΚΔ είναι ορθογώνιο.
10. α) Η διχοτόμος είναι και ύψος. β) Δείξε ότι ΚΕΔ ισοσκελές. γ) Σύγκρινε τα ΑΔΛ και ΑΖΒ.
δ) ΑΕ=ΑΚ+ΚΕ.
11. Δείξε ότι τα ΑΤΝ, ΝΒΡ, ΡΓΣ και ΣΔΤ είναι ίσα.

Φύλλο αυτοαξιολόγησης (σελ 96)

1η άσκηση

Δείξε ότι τα τρίγωνα ΔΓΖ , ΑΔΕ και ΒΕΖ είναι ίσα.

Άσκηση 2η

Δείξε $A\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ$ και ότι το ΑΖΔΒ είναι παραλληλόγραμμο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Ενότητα 5.1

Α. Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους (σελ 101)

1	2	4	5	6
Σ	Σ	Λ	Σ	Σ

Ασκήσεις (σελ 101)

1. Τα Κ,Λ και Μ μέσα πλευρών του ΑΒΓ.
2. Στο ΑΔΓ το Ζ είναι μέσο της ΑΔ και το Η της ΑΓ.
3. Θεώρησε σημείο Ζ μέσο της ΕΓ.
4. Θεώρησε Μ το μέσο της ΒΓ τότε στα τρίγωνα ΒΔΜ και ΑΒΓ.
5. α) Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.
β) Δείξε ότι το Δ είναι μέσο της ΒΕ. Τότε στο ΒΓΕ.
γ) Δείξε ότι ΔΜ||ΑΓ.
6. α) Δείξε ότι τα ΕΚΗΛ, ΚΘΛΖ είναι παραλληλόγραμμα
β) Οι διαγώνιοι παραλληλογράμμου διχοτομούνται.
7. α) Δείξε ότι το ΑΒΖ είναι ισοσκελές.
β) Παρατήρησε ότι η ΑΔ μεσοκάθετη του ΒΖ.
γ) Δείξε ότι ΖΜ||ΑΒ.

8. Δείξε ότι το ΑΣΒΓ είναι παραλληλόγραμμο
9. α) Δείξε ότι $K\hat{A}E = A\hat{E}K$,
β) $ΛE = KΛ - KE$, γ) Δείξε ότι Ε μέσο ΒΖ.
10. Δείξε ότι στο ΒΕΓ είναι ΛΜ||=ΕΓ/2. Να εργαστείς ομοίως και στα ΔΕΓ, ΒΔΕ, ΒΔΓ.
11. Η ευθεία που ορίζουν τα σημεία Μ είναι παράλληλη της ε.
12. α) Κριτήριο ΠΓΠ,
β) Γράψε την $Z\hat{A}Θ$ ως άθροισμα γωνιών.
γ) Δείξε ότι ΟΚ||ΑΖ και ΟΛ||ΑΒ
13. Άρα το Μ κινείται στον κύκλο (Ο,R/2).
14. α) Δείξε ότι ΜΝ||ΒΓ,
β) Αφού ΝΜΚΓ παραλληλόγραμμο τότε;
γ) Δείξε ότι ΒΝ=ΓΜ.

Ενότητα 5.2

Ασκήσεις (σελ 107)

1. 10 cm **2.** 10 cm
3. α) Δείξε ότι ΔΜ=ΑΒ/2 και ΕΜ=ΑΒ/2,
β) $AB = AΓ = 12\text{cm}$, $BΓ = 8\text{cm}$
4. α) Δείξε ότι ΔΓ διχοτόμος,
β) Στο ορθογώνιο ΔΒΜ, $\hat{B} = 30^\circ$.
5. Έστω Σ το σημείο τομής της ΖΚ με την ΜΕ. Δείξε ότι το ΚΣΜ ορθογώνιο.
6. Έστω Μ το σημείο τομής της ΕΔ με την ΑΓ. Δείξε ότι ΜΔΓ και ΑΔΜ ισοσκελή.
7. Δείξε ότι το ΑΒΜ είναι ισοσκελές.
Επίσης $B\hat{A}H = A\hat{Γ}B$ ως γωνίες με κάθετες πλευρές.
8. α) Δείξε ότι ΖΔ||=ΑΕ, β) Δείξε ότι ΕΔ=ΒΓ/2,
γ) $A\hat{Z}B = 60^\circ$
9. α) Δείξε ότι 2ΔΓ=ΚΓ, β) Δείξε ότι τα ΒΕΔ και ΚΔΓ είναι ίσα, γ) Στο ΚΔΓ είναι $\hat{K} < \hat{Γ} < \hat{Δ}$
10. α) Στο ισοσκελές ΖΒΓ είναι $B\hat{Z}Γ = B\hat{Γ}Z$
β) Στο ισοσκελές ΔΕΓ η $A\hat{Δ}Γ$ είναι εξωτερική
γ) Δείξε ότι τα ΚΔΓ και ΑΚΖ είναι ισοσκελή
11. α) Δείξε ότι ΑΔ=ΑΒ
β) Είναι $A\hat{K}Δ = A\hat{Δ}K$
γ) Στο ΑΔΚ είναι $A\hat{K}Δ = 90^\circ - \frac{Δ\hat{A}K}{2}$
12. α) Δείξε ότι το ΑΓΜ είναι ισοσκελές,
β) Δείξε ότι το ΔΜΓ είναι ορθογώνιο
γ) Στο ορθογώνιο ΔΜΒ είναι $\hat{B} = 30^\circ$
13. α) Στο ΑΒΓ το ΜΚ ενώνει μέσα δύο πλευρών του
β) $M\hat{K}Δ = 90^\circ + M\hat{K}A$
γ) Σύγκρινε τα ΕΝΜ και ΜΚΔ,
δ) Δείξε ότι το ΑΝΜΚ είναι παραλληλόγραμμο.
14. Δείξε ότι το ΑΚΒΛ έχει τρεις ορθές γωνίες. Δείξε ότι ΜΚ||ΒΓ.
15. α) Δείξε ότι το ΑΝΓ είναι ισοσκελές,
β) Δείξε ότι το ΝΛΜΚ είναι παραλληλόγραμμο.
16. Στο ορθογώνιο ΑΔΒ η ΚΔ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, τότε ΚΔ=ΚΒ=ΚΑ, εργαστείτε ομοίως στο ΑΒΕ. Δείξε ότι $A\hat{K}E + B\hat{K}Δ = 90^\circ$.
17. Δείξε ότι ΜΕ=ΜΔ και ΚΕ=ΚΔ.
18. Το σημείο Μ κινείται σε ένα τεταρτοκύκλιο κέντρου Ο και ακτίνας r=AB/2.

Ενότητα 5.3

Ασκήσεις (σελ 114)

1. Στο περίκεντρο τού τριγώνου ΑΒΓ
2. Στο έκκεντρο τού τριγώνου ΑΒΓ
3. Δείξε ότι τα ΒΔΙ και ΓΕΙ είναι ισοσκελή.
4. α) ΙΒ μεσοκάθετος του ΑΔ. β) Το σημείο Ι
4. Δείξε ότι ΙΕ=ΙΖ, ΙΕ=ΙΔ και ΙΖ=ΙΔ.
6. Στο ΕΑΖ το σημείο Γ είναι το περίκεντρό του.
7. α) Το Ι είναι το έκκεντρό του, β) Σύγκρινε τα ΒΙΓ και ΕΙΓ, γ) Σύγκρινε τα ΙΑΕ και ΙΔΒ.
8. Θεώρησε τυχαία σημεία Α, Β στις πλευρές της γωνίας. Φέρε την ΑΒ και τις διχοτόμους των σχηματιζόμενων γωνιών οι οποίες τέμνοντα στο Κ. Επανέλαβε για δύο άλλα τυχαία σημεία.

Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους (σελ 119)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Λ	Λ	Λ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ

Ασκήσεις (σελ 119)

1. Έστω Ο το κέντρο του ΑΒΓΔ. Τα σημεία Κ, Λ είναι βαρύκεντρα στα ΑΓΔ και ΑΒΓ.
2. α) Δείξε ότι το ΒΕΓΔ είναι παραλληλόγραμμο,
β) Στο ΔΒΓ το Η είναι το βαρύκεντρο.
3. Δείξε ότι το ΕΚΖΗ είναι παραλληλόγραμμο
4. Έστω Ι το σημείο της διαγώνιου. Το Ι είναι το ορθόκεντρο του ΑΕΒ.
5. Το σημείο Γ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΕΑΖ.
6. α) Δείξε ότι τα ΑΒΓΕ και ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμα,
β) Στο ΒΔΕ το Κ είναι βαρύκεντρο.
7. α) Δείξε ότι ΑΔΕΖ είναι παραλληλόγραμμο,
β) Δείξε ότι ΕΖ||=ΔΒ
γ) Στα ΔΖΕ και ΑΒΓ σημεία τομής διαμέσων
8. $O\hat{Z}A + O\hat{A}Z = 180^\circ$ Δείξε ότι το ΑΓΗ είναι ισοσκελές. Ακολούθως σύγκρινε τα ΑΒΓ και ΗΒΓ.
9. α) ΒΓ μεσοκάθετος ΑΔ και ΕΜ μεσοκάθετος ΑΔ,
β) Δείξε ότι στο ισόπλευρο ΑΔΕ η ΑΓ διχοτόμος.
γ) Σε ισόπλευρο τρίγωνο το βαρύκεντρο είναι και το περίκεντρο. δ) Δείξε ότι ΓΕ=2ΓΜ.
10. α) Δείξε ότι ΑΜ=ΜΓ. Αν Ο το σημείο τομής ΖΕ και ΑΜ, δείξε ότι $O\hat{Z}A + O\hat{A}Z = 90^\circ$
β) Αν Ι είναι το σημείο τομής των ΑΔ και ΜΗ, τότε στο ΑΜΒ το σημείο Ι είναι το ορθόκεντρο.

Ενότητα 5.4

Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους (σελ 126)

1	2	3	4	5	6
Λ	Σ	Λ	Λ	Σ	Σ

Ασκήσεις (σελ 126)

1. α) $MN = 6$, β) $A\hat{N}Δ = 90^\circ$, γ) $MΘ = 2$, $ΘN = 4$
δ) Στο ΑΝΔ η ΜΝ είναι διάμεσος και το σημείο Θ την

χωρίζει σε λόγο 1:2

2. Δείξε ότι έχει δύο πλευρές παράλληλες και ότι ΕΖ=ΔΗ=ΑΒ/2.
3. Δείξε ότι ΚΛΓΔ παραλληλόγραμμο. Στο ορθογώνιο ΑΕΔ η ΕΚ είναι διάμεσος από ορθή.
4. α) $KM = 2$, $\Delta\Gamma = 8$, β) Δείξε ότι ΑΜ=ΜΒ=ΜΔ=4, ΔΒ=8, ΒΝ=4… γ) $\hat{B} = 120^\circ$, $\hat{\Gamma} = 60^\circ$, $\hat{\Delta} = 90^\circ$
5. Δείξε ότι $K\Lambda = // AB$
6. Δείξε ότι $K\Lambda = // AB$
7. Αν Κ το σημείο τομής της ΒΗ και της ΓΔ, δείξε ότι το ΒΓΚ είναι ισοσκελές.
8. Δείξε ότι ΑΒΗΔ ορθογώνιο, ΑΒΓΗ παραλληλόγραμμο και ΑΒΓΔ τραπέζιο.
9. Δείξε ότι το ΑΖΔ είναι ορθογώνιο και ότι η ΑΖ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$.
10. Βρες κατάλληλα τραπέζια με διάμεσο την ΚΚ΄.
11. Η ΔΜ είναι διάμεσος στο τραπέζιο Β΄ΒΓΓ΄.
12. Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του παραλληλογράμμου, αν ΟΟ΄ κάθετη στην ε, οπότε ΟΟ΄||ΑΑ΄||ΓΓ΄.
13. α) ΕΔ μεσοκάθετος στην ΒΔ και $A\hat{B}\Delta = 30^\circ$,
    β) Δείξε ΑΟ||ΕΒ,
    γ) Το Ζ είναι ορθόκεντρο του ΔΒΕ
14. Έστω ΟΟ΄ κάθετη στην ΓΔ. ΟΟ΄ διάμεσος του τραπεζίου ΑΒΒ΄Α΄
15. Έστω Ο το μέσο της ΑΒ, ΑΔΒΕ τραπέζιο.
16. α) ΑΕ||ΚΛ.
    β) Στο ισοσκελές τραπέζιο οι διαγώνιοί του είναι...
    β) ΚΛ=ΚΕ=ΚΓ
17. α) Κριτήριο ισότητας ορθογωνίων
    β) Προκύπτει από το (Α)
    γ) Δείξε ΚΜ=ΜΛ
    δ) Δείξε ΒΜ=ΜΓ και ΜΝ ύψος και 2ΜΝ=ΒΓ
18. Εφαρμογή της προηγούμενης άσκησης.

Φύλλο αυτοαξιολόγησης (σελ 130)

Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους

(1-Λ) - (2-Λ) - (3-Λ)

Άσκηση 1η: Δείξε ότι $B\hat{A}M = \Gamma\hat{A}E$

Άσκηση 2η: Βρείτε κατάλληλα τραπέζια με διαμέσους ΚΚ΄, ΝΝ΄, ΛΛ΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Ενότητα 6.1

Ασκήσεις (σελ 136)

1. α) Κριτήρια ορθογωνίων β) ορθογώνιο, περίμετρος 440cm γ) τραπέζιο, ΖΕ = 100.
2. Εργαζόμαστε στα τρίγωνα ΑΔΓ και ΑΓΒ, όπως και στα ΑΔΒ και ΔΓΒ.
3. 1η περίπτωση αν οι ευθείες ε και ε΄ είναι ομοεπίπεδες: Το ΑΒΒ΄Α΄τραπέζιο με διάμεσο Α΄Β'
   2η περίπτωση αν οι ευθείες ε και ε΄ είναι ασύμβατες: Φέρε την ΑΒ΄.
4. Τα τεμνόμενα επίπεδα έχουν όλα τα κοινά σημεία τους πάνω σε μία ευθεία.

Ενότητα 6.2

Ασκήσεις (σελ 139)

2. α) 1) $A\hat{O}B = 120^\circ$ 2) $A\hat{O}N = 60^\circ$, β) $\Sigma\hat{N}O = 60^\circ$
3. α) $\Delta\hat{H}A = 90^\circ$, β) $E\hat{Z}H = 30^\circ$, β) 90° γ) 45°
4. α) 90°, β) 90°, γ) 60°

Φύλλο αυτοαξιολόγησης (σελ 140)

α) 90°, β) $B\hat{K}\Gamma = 60^\circ$, γ) Θεώρημα τριών καθέτων

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Αργυρόπουλος Η., Βλάμος Π., Κατσούλης Γ., Μαρκάτης Στ., Σιδέρης Π., *Ευκλείδεια Γεωμετρία*, Ο.Ε.Δ.Β., 2007.
2. F.G.-M., *Ασκήσεις Γεωμετρίας (Ιησουιτών)*, μετάφραση Δ. Γκιόκα, Εκδ. Καραββία, 1952.
3. Γιαννέλος Π., Δρακόπουλος Μ., *Γεωμετρία*, Εκδ. Ηράκλειτος, 1976.
4. Θωμαΐδης Γ., Παντελίδης Γ., Ξένος Θ., Πούλος Αν., Στάμου Γ., *Ευκλείδεια Γεωμετρία*, Ο.Ε.Δ.Β., 2000.
5. Θωμαΐδης Γ, Πούλος Ανδ., *Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας,* Εκδ. Ζήτη, 2000, ISBN: 960-431-605-2.
6. Κανέλλου Σ.Γ, *Ευκλείδειος Γεωμετρία*, Ο.Ε.Δ.Β., 1976.
7. Μ.Α. Μπρίκας, *Τα περίφημα άλυτα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας*, Εκδ. Παπασπύρου, 1970.
8. Νικολάου Ν., *Θεωρητική Γεωμετρία*, Ο.Ε.Δ.Β., 1973.
9. Παπαμιχαήλ Δ, Σκιαδά Α, *Θεωρητική Γεωμετρία*, Ο.Ε.Δ.Β., 1987.
10. Πάμφιλος Πάρις, *«ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΝ»*, Π.Ε.Κ., 2016, ISBN- 9789605244682.
11. Σταμάτη Ε., *Ευκλείδεια γεωμετρία*, Εκδ. Σάκκουλα, 1952.
12. Συλλογικό έργο, *Ευκλείδη Στοιχεία*, Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ, 2001, ISBN- 9789608687905.
13. Τόγκας Π.Γ., *Ασκήσεις και προβλήματα Γεωμετρίας*, Εκδ. Τόγκα, 1978.
14. Τράπεζα θεμάτων Ι.Ε.Π.
15. Δ. Τσιμπουράκης, *Η Γεωμετρία και οι εργάτες της στην Αρχαία Ελλάδα*, Εκδ. Ατραπός, 2003, ISBN-9789608325593.
16. E.T.Bell, *Οι Μαθηματικοί*, Π.Ε.Κ., 2016, ISBN-9789605245559
17. F. Eugene Seymour, Paul James Smith, *Plane Geometry*, N.Y. 1941.
18. Howard Eves, *Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών*, Εκδ.Τροχαλία, 1989, ISBN-9789607022004.
19. Victor J. Katz, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Π.Ε.Κ., 2013, ISBN-9789605243340
20. Richard Mankiewicz, *Η Ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδ. Αλεξάνδρεια, 2002, ISBN-9789602212301.
21. Robert Osserman, *Ποίηση του Σύμπαντος*, Εκδ. Κάτοπτρο, 1998, ISBN-9789607778147.
22. Andrew Sutton, *Κανόνας και διαβήτης,* Εκδ.Αλεξάνδρεια, 2015, ISBN-9789602216491.
23. R.B.Nelsen, *Αποδείξεις χωρίς λόγια*, Εκδ. Σαββάλας, 1996, ISBN-9789604601523
24. Ivars Peterson, Ταξίδι στον κόσμο των Μαθηματικών, Εκδ. W.H.Freeman – Γιαλλελής – Μανωλάκης, 1988.
25. Alexander Bogomolny, *Cut the knot*, Ιστότοπος..
26. Antonio Gutierrez, *GoGeometry*, Ιστότοπος.
27 *GeoGebra org*, Ιστότοπος.
28. WOLFRAM Demonstrations Project, Ιστότοπος.

Ευρετήριο όρων