ΟΔΗΓΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ

Εισαγωγή

Το βιβλίο που κρατάτε στα χέρια σας έχει ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό, την ισόρροπη παράθεση του αυστηρού μαθηματικού περιεχόμενου, από τη μία, και την ανάδειξη του κεντρικού ρόλου του μαθητή στη μαθησιακή διαδικασία από την άλλη. Κυρίαρχο ρόλο στην εκπαιδευτική διαδικασία δεν παίζει μόνο ο καθηγητής, αλλά και ο μαθητής, γιατί η μάθηση προϋποθέτει την ενεργή συμμετοχή των μαθητών στην εκπαιδευτική διαδικασία ώστε να μπορούν να αντιλαμβάνονται και να επεξεργάζονται τις βασικές μαθηματικές έννοιες και να αναζητούν και να επινοούν λύσεις σε προβλήματα.

Στο συγκεκριμένο βιβλίο επιχειρείται ο σχεδιασμός και η διαχείριση της διδακτικής πράξης να πραγματοποιούνται με τρόπους που υποστηρίζουν τον μαθητή, ώστε να σκέφτεται ως μαθηματικός ερευνητής. Ο τρόπος με τον οποίο είναι γραμμένο το βιβλίο αποδομεί το κλασικό δασκαλοκεντρικό μοντέλο όπου ο μαθητής λειτουργεί ως παθητικός δέκτης εφόσον σχεδόν αποκλειστικά ο εκπαιδευτικός καθορίζει τη μαθησιακή πορεία.

Στο βιβλίο υλοποιείται μια από τις βασικές επιλογές του ΠΣ (Πρόγραμμα Σπουδών) που είναι η ανάπτυξη του μαθηματικού περιεχομένου με βάση την έννοια της εξελικτικής πορείας ανάπτυξης των Προσδοκώμενων Μαθησιακών Αποτελεσμάτων (ΠΜΑ) μέσω των οποίων εξειδικεύονται οι γενικοί στόχοι μάθησης στο νέο ΠΣ.
Η νέα γνώση ανακαλύπτεται από τον μαθητή μέσω της διαχείρισης – επεξεργασίας κατάλληλων μαθηματικών δραστηριοτήτων και έργων. Ο ρόλος του καθηγητή είναι βοηθητικός και υποστηρικτικός. Δημιουργεί το κατάλληλο υποστηρικτικό περιβάλλον (και με τη βοήθεια ψηφιακών ή χειραπτικών εργαλείων) ώστε ο μαθητής, μέσω ερευνητικής διαδικασίας να φθάσει στη νέα γνώση.

Το βιβλίο της Γεωμετρίας Α΄ Λυκείου περιέχει τα θεματικά πεδία «Γεωμετρία, Μετρήσεις» τα οποίο συγκροτούνται από 6 θεματικές (κεφάλαια). Το κάθε κεφάλαιο χωρίζεται σε επί μέρους ενότητες, όπου αναπτύσσονται και τα αντίστοιχα μαθησιακά αποτελέσματα (Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα - στόχοι της μάθησης).

Περιεχόμενα

Τρόπος δομής ενοτήτων

Οι διδακτικές ενότητες – παράγραφοι ακολουθούν μία συγκεκριμένη δομή. Ξεκινάμε με το:

- **Τι καινούργιο υπάρχει στην ενότητα;**

Εδώ γράφουμε ένα προς ένα τα (Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ) ξεκινώντας με μία φράση της μορφής: «**Στις παρακάτω σελίδες»**

Ακολουθούν οι:

- **Απαραίτητες γνώσεις.**

Παραθέτουμε όλη την απαραίτητη ορολογία και τις προτάσεις, επιγραμματικά, που χρειάζονται για την κατανόηση των όσων θα ακολουθήσουν.

Το βασικό εργαλείο για την νέα γνώση η:

- **Δραστηριότητα.**

Α) Θέτουμε: μία ελκυστική πραγματική (ρεαλιστική) κατάσταση, ή ένα σύνθετο ερώτημα, ή μία περιγραφή ή οτιδήποτε θα μπορούσε να αποτελέσει αφορμή για προβληματισμό και μαθηματική δραστηριότητα. Βασικός στόχος της δραστηριότητας είναι μέσω της ενεργής συμμετοχής των μαθητών η επεξεργασία - διαχείριση των ΠΜΑ.
Β) Παραθέτουμε: υποδείξεις χειρισμού και διαπραγμάτευσης στον εκπαιδευτικό θα δίνονται στο συμπληρωματικό υλικό για τον εκπαιδευτικό **(**πιθανά να υπάρχει και φύλλο εργασίας).

Συνοψίζουμε:

- **Ας δούμε τι έχει προκύψει.**

Συνοψίζουμε: τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε από την ανάπτυξη της δραστηριότητας, δηλαδή ορισμοί, θεωρήματα κ.λπ.

Ακολουθούν:

- **Ασκήσεις (ή παραδείγματα) κατανόησης.**

Επιλέγουμε απλές ασκήσεις (παραδείγματα) και ερωτήματα για την κατανόηση των βασικών εννοιών.

Η χρησιμότητα των όσων μάθαμε:

- **Σε τι χρησιμεύουν τα παραπάνω;**

Αρχικά περιγράφουμε σε ένα σύντομο κείμενο τι επιπλέον μπορούμε να κάνουμε με την καινούργια έννοια, την νέα μαθηματική πρόταση ή τον κανόνα.
Στη συνέχεια παραθέτουμε λυμένες εφαρμογές, αρχικά μία απλή και στη συνέχεια μία ή δύο περισσότερο σύνθετες. Στην ουσία υποδεικνύουμε μία μεθοδολογία την οποία θα μπορεί ο μαθητής να την αξιοποιήσει στις άλυτες ασκήσεις.

Θέματα προς διαπραγμάτευση:

- **Ασκήσεις και θέματα κριτικής σκέψης.**

Παραθέτουμε κάποια θέματα που απαιτούν ελάχιστες πράξεις, νοερούς υπολογισμούς, γρίφους, κανονικότητες και γενικά μη συμβατικά θέματα.

- **Ασκήσεις – Προβλήματα.**

Παραθέτουμε μία ποικιλία θεμάτων διαβαθμισμένης δυσκολίας.

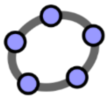
- **Εργασίες για την τάξη και το σπίτι.**

Εδώ προτείνουμε θέματα – άλυτα τα οποία μπορεί να παρουσιάζουν διαθεματικό ενδιαφέρον μέσα από την επιστήμη, την τέχνη, την κοινωνία κ.λπ. τα οποία μπορούν να επεξεργασθούν από τους μαθητές στην τάξη ή στο σπίτι τους.

Εμβόλιμα στο κείμενο για την υποστήριξη της διδασκαλίας υπάρχουν ένας ικανός αριθμός εφαρμογών GeoGebra οι οποίες δίνουν την δυνατότητα στο μελετητή να διερευνήσει δυναμικά το πρόβλημα που εξετάζει. Η τεχνολογία εντάσσεται στην στρατηγική ανάπτυξης κουλτούρας έρευνας και αναζήτησης.
Επίσης σε επιλεγμένες ασκήσεις υπάρχει το σηματάκι του GeoGebra. Εκεί ο μαθητής θα βρει έναν ηλεκτρονικό βοηθό όπου με προοδευτικά αποκαλυπτικό τρόπο δίνονται οδηγίες και όχι η λύση της άσκησης. Καλό είναι ο καθηγητής να προτείνει την αξιοποίηση του εργαλείου αυτού από μέρους των μαθητών.
Μέσα στο κείμενο του μαθήματος θα βρείτε και ένα αρκετά πλούσιο υλικό της ιστορίας των μαθηματικών, πλήρως ενταγμένο κάθε φορά στο αντικείμενο που εξετάζουμε. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου ως ανακεφαλαιωτικό υλικό υπάρχει η Ανακεφαλαίωση, Φύλλο Αυτό-αξιολόγησης (έντυπο και ηλεκτρονικό) και Εργασίες που μπορούν να γίνουν ομαδικά ή ατομικά.

Συμβολισμοί και Εικονίδια

Σε όλες τις Δραστηριότητες που συνοδεύονται από Ψηφιακά Μαθησιακά Αντικείμενα υπάρχουν οι αντίστοιχες παραπομπές και χρησιμοποιούνται τα εικονίδια ως εξής:

Εικονίδιο	Επεξήγηση	Χρήση
	**Εφαρμογή Geogebra** *(Δεν απαιτείται πρόσθετο λογισμικό)*	Δραστηριότητες οπτικοποίησης, μοντελοποίησης και επίλυσης προβλημάτων.
	Οπτικοποίηση	Εφαρμογή μοντελοποίησης του προβλήματος ή/και οπτικής αναπαράστασης (σχήμα της άσκησης).
	Διαδραστική Εφαρμογή	Εφαρμογή υψηλής διαδραστικότητας που καθοδηγεί το χρήστη στη μοντελοποίηση και επίλυση του εκάστοτε προβλήματος.
	Video	
	Τρισδιάστατη Αναπαράσταση (3D)	Τρισδιάστατη αναπαράσταση, Εφαρμογές της Στερεομετρίας.
	Αυτοαξιολόγηση	Quiz αυτοαξιολόγησης γνώσεων (online) Έλεγχος ορθότητας απάντησης.

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ) ανά κεφάλαιο και ενότητα

1° Κεφάλαιο / Παράλληλες ευθείες

1.1 Ιδιότητες παραλλήλων ευθειών

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ

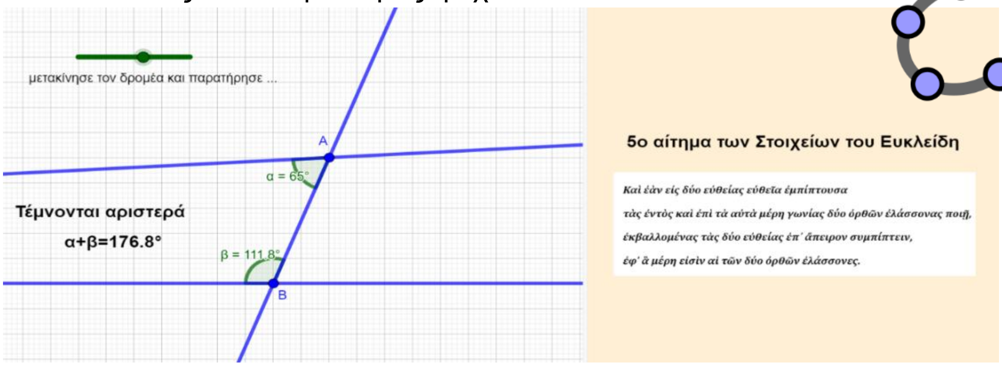
- Ευκλείδειο αίτημα και η σημασία του στην εξέλιξη της Γεωμετρίας.
- Ιδιότητές των γωνιών που σχηματίζονται όταν δύο παράλληλες τέμνονται από τρίτη ευθεία.
- Σχέση ανάμεσα σε γωνίες με παράλληλες πλευρές.
- Κατασκευή παράλληλης σε δεδομένη ευθεία από σημείο εκτός αυτής.
- Χρήση ιδιοτήτων παραλλήλων ευθειών για την επίλυση μαθηματικών και ρεαλιστικών προβλημάτων

ΠΜΑ.

Γ.Ε.10.1. Αναγνωρίζουν τη σημασία του 5ου Ευκλείδειου Αιτήματος στην εξέλιξη της Γεωμετρίας.
Γ.Ε.10.2. Αποδεικνύουν τις σχέσεις γωνιών που σχηματίζουν παράλληλες ευθείες όταν τέμνονται από τρίτη και διατυπώνουν τους αντίστροφους ισχυρισμούς και τους αναγνωρίζουν ως κριτήρια παραλληλίας.
Γ.Ε.10.5. Σχεδιάζουν με γεωμετρικά όργανα από σημείο εκτός ευθείας, ευθεία παράλληλη προς αυτήν και αιτιολογούν την διαδικασία.
Γ.Ε.10.6. Χρησιμοποιούν ιδιότητες παράλληλων ευθειών για την επίλυση μαθηματικών και ρεαλιστικών προβλημάτων.

Διδακτική διαδικασία

1. Το αρχείο GeoGebra δίνει τη δυνατότητα στο μαθητή να «ανακαλύψει» το 5° αίτημα του Ευκλείδη. Με τη βοήθεια του δρομέα καταλήγουμε στη εύρεση ενός τρόπου για να διαπιστώσουμε αν δύο ευθείες είναι παράλληλες ή όχι.



Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία

2. Η 1η δραστηριότητα έρχεται ως συνέχεια της ενασχόλησης με την προηγούμενη διαδικτυακή εφαρμογή. Σκοπό έχει ο μαθητής να κατανοήσει το 5° Ευκλείδειο αίτημα. (**ΠΜΑ. Γ.Ε. 10.1**)

3. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε την πρόταση «αν οι παράλληλες μεταξύ τους ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται από τρίτη ευθεία τότε οι σχηματιζόμενες εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες». Στην απόδειξη της πρότασης γίνεται η πρώτη γνωριμία των μαθητών με την εις άτοπον απαγωγή. Ο στόχος είναι οι μαθητές να αποδεικνύουν τις σχέσεις γωνιών που σχηματίζουν παράλληλες ευθείες όταν τέμνονται από τρίτη και να διατυπώσουν κριτήρια για την παραλληλία δύο ευθειών του επιπέδου. (**ΠΜΑ -Γ.Ε. 10.2**)

4. Αναφέρονται βασικές προτάσεις, με βάση τα παραπάνω και αποδεικνύεται ότι δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες είναι ίσες.

5. Ως άμεση συνέπεια των παραπάνω καταλήγουμε στη κατασκευή από σημείο εκτός ευθείας παραλλήλου προς αυτήν (**ΠΜΑ. Γ.Ε.10.5**) Η κατασκευή γίνεται με γνώμονα και όχι με κανόνα και διαβήτη που απαιτεί ισότητα τριγώνων και θα γίνει αργότερα.

6. Στη $2^{η}$ δραστηριότητα οι μαθητές χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των παραλλήλων ευθειών για την επίλυση μαθηματικού – ρεαλιστικού προβλήματος. (**ΠΜΑ. Γ.Ε. 10.6**)

7. Στο ιστορικό σημείωμα που ακολουθεί αναφέρεται στην ιστορία της αμφισβήτησης του $5^{ου}$ αιτήματος του Ευκλείδη και στα συμπεράσματα που κατέληξε η πορεία αυτή. Περισσότερες πληροφορίες μπορείτε να αναζητήσετε στον σύνδεσμο: Εξωτερικός Σύνδεσμος/ Link

8. Ως δημιουργική εργασία προτείνεται ένα ιστορικό θέμα που μπορεί να προκαλέσει. Η μέτρηση της περιφέρειας της γης από τον Ερατοσθένη. Δίνεται σύντομα το ιστορικό πλαίσιο και επεξηγηματικό video σε υπερσύνδεσμο.

1.2 Γωνίες του τριγώνου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ

- Άθροισμα γωνιών τριγώνου.
- Γωνίες με πλευρές κάθετες ή παράλληλες.
- Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου.

ΠΜΑ.

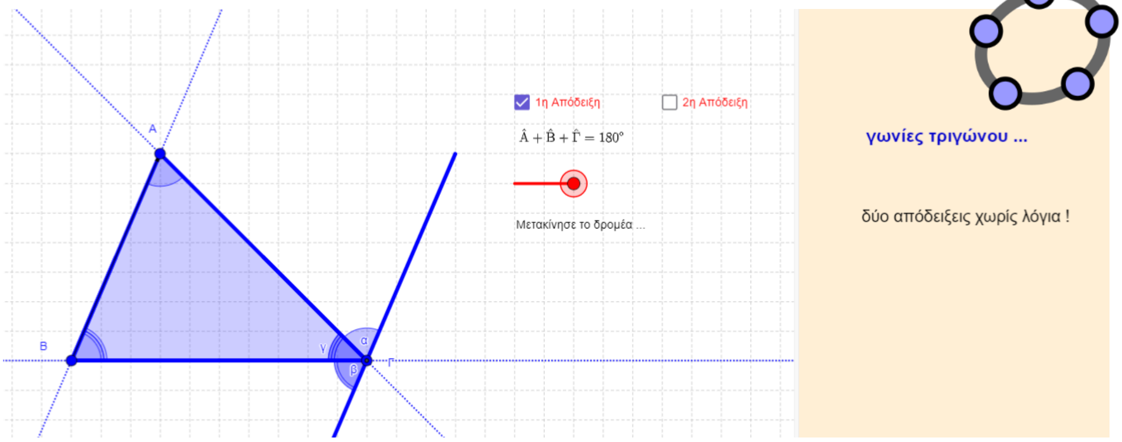
Γ.Ε.10.3 Αποδεικνύουν ότι το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι ίσο με μία ευθεία γωνία.

Γ.Ε.10.4 Αναγνωρίζουν γωνίες με πλευρές κάθετες ή παράλληλες, διερευνούν και αποδεικνύουν τις μεταξύ τους σχέσεις.

Γ.Ε.10.7 Ανακαλύπτουν και αποδεικνύουν τον τύπο για το άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου

Διδακτική διαδικασία

1. Με τη βοήθεια μιας πλακόστρωσης η εισαγωγική δραστηριότητα προσανατολίζει τους μαθητές στο να αποδείξουν κάτι που γνωρίζουν ήδη από το Γυμνάσιο, ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180^{o} (**ΠΜΑ Γ.Ε. 10.3**).
Η εφαρμογή GeoGebra που συνοδεύει την απόδειξη.



Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία

δίνει την δυνατότητα στον μαθητή να κατανοήσει την απόδειξη ως αποτέλεσμα μεταφοράς γωνιών.

2. Στη συνέχεια ασχολούμαστε με τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην εξωτερική γωνία και τις απέναντί της εσωτερικές. Με τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα σε δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες (**ΠΜΑ Γ.Ε. 10.4**) αναγνωρίζουμε εφαρμογές της πρότασης αυτής στην Γεωμετρία αλλά και στη Φυσική.

3. Με την επόμενη δραστηριότητα ανακαλύπτουμε το άθροισμα των γωνιών οποιουδήποτε πολυγώνου. Η όλη δραστηριότητα μπορεί να γίνει χωρίζοντας τους μαθητές σε ομάδες, όπου ανακαλύπτουν προοδευτικά το άθροισμα των γωνιών τετραπλεύρου, πενταπλεύρου κ.ο.κ. με σκοπό να βρουν το κρυμμένο μοτίβο και να διατυπώσουν μία εικασία. Ο επόμενος στόχος είναι η απόδειξή της. (**ΠΜΑ Γ.Ε. 10.7**)

4. Με παρόμοια δραστηριότητα οι μαθητές μπορούν να ανακαλύψουν και την σχέση που υπάρχει με το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών οποιουδήποτε πολυγώνου.

5. Στις λυμένες εφαρμογές έγινε προσπάθεια να διατυπωθεί ένας αλγόριθμος επίλυσης θεωρητικών ασκήσεων για τις γωνίες τριγώνου. Οπότε ο μαθητής καλείται στην αρχή να εφαρμόσει τη προτεινόμενη διαδικασία, αλλά πάντα ο στόχος μας είναι να ανακαλύψει μόνος την δικιά του μέθοδο.

6. Στο ιστορικό σημείωμα που ακολουθεί παρουσιάζονται οι τρεις Γεωμετρίες όπως αυτές αναπτύχθηκαν. Για να αναπτυχθεί το ενδιαφέρον των μαθητών προτείνεται και μία δραστηριότητα. Με απλά υλικά μπορούν οι ίδιοι οι μαθητές να ανακαλύψουν την ύπαρξη τριγώνων με άθροισμα γωνιών μεγαλύτερο των 180^{o}.
Περισσότερες πληροφορίες μπορείτε να αναζητήσετε στον σύνδεσμο:
(Link-Εξωτερικός Σύνδεσμος) **Βιβλίο του Συγγραφέα για τις Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες**

Ως ανακεφαλαίωση δίνεται:

Α. Μία σύντομη παρουσίαση των όσων μάθαμε μέχρι τώρα – Τυπολόγιο.

Β. Ένα ενδεικτικό φύλλο αυτοαξιολόγησης.

Γ. Δραστηριότητα εύρεσης των γωνιών αστεριού με οποιοδήποτε αριθμό ακτίνων. Εδώ οι μαθητές αφού ασχοληθούν με συγκεκριμένου τύπου αστεράκια, καλούνται να συμπληρώσουν έναν πίνακα και να εικάσουν τη κρυμμένη σχέση και τέλος να την αποδείξουν.

2ο Κεφάλαιο / Η ισότητα των τριγώνων.

2.1 Ίσα τρίγωνα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ

- Πότε δύο τρίγωνα λέγονται ίσα.
- Κριτήρια ισότητας δύο τριγώνων
- Κριτήρια ισότητας δύο ορθογωνίων τριγώνων.
- Ιδιότητες των στοιχείων ενός ισοσκελούς τριγώνου.
- Κριτήρια για να είναι ένα τρίγωνο ισοσκελές
- Κατασκευή τριγώνων με δεδομένα κάποια από τα κύρια στοιχεία τους (γωνίες, πλευρές).
- Χρήση ιδιοτήτων ίσων τριγώνων για την επίλυση μαθηματικών και ρεαλιστικών προβλημάτων.

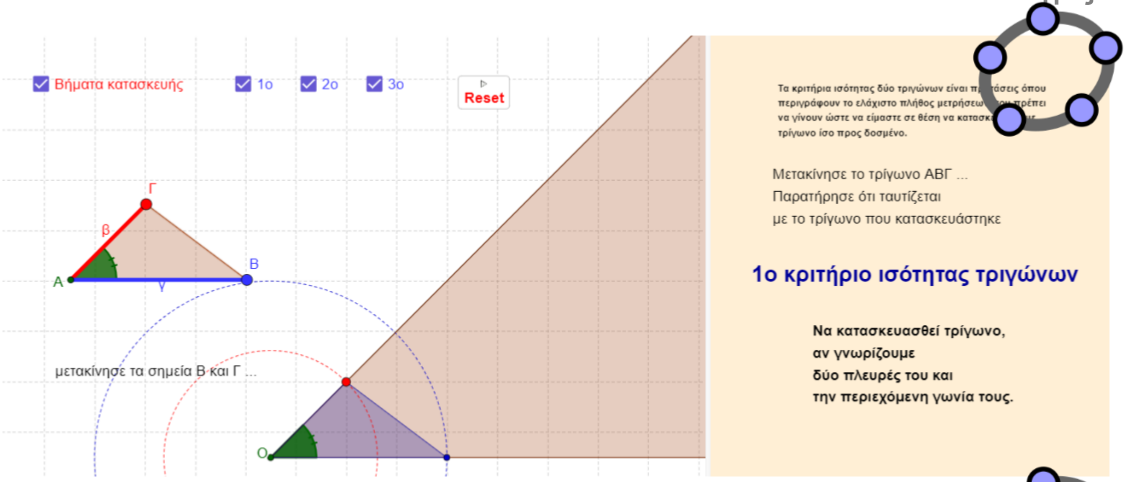
ΠΜΑ.
Γ.Ε.10.8. Ελέγχουν πότε σχέσεις μεταξύ βασικών στοιχείων τριγώνων και ορθογωνίων τριγώνων αποτελούν κριτήριο ισότητας αυτών.
Γ.Ε.10.9. Κατασκευάζουν με κανόνα και διαβήτη τρίγωνα με δεδομένα βασικά τους στοιχεία (γωνίες, πλευρές).
Γ.Ε.10.10. Αποδεικνύουν και χρησιμοποιούν κριτήρια που καθορίζουν ότι ένα τρίγωνο να είναι ισοσκελές.
Γ.Ε.10.11. Χρησιμοποιούν ιδιότητες των ίσων τριγώνων στην επίλυση μαθηματικών και ρεαλιστικών προβλημάτων.

Διδακτική διαδικασία

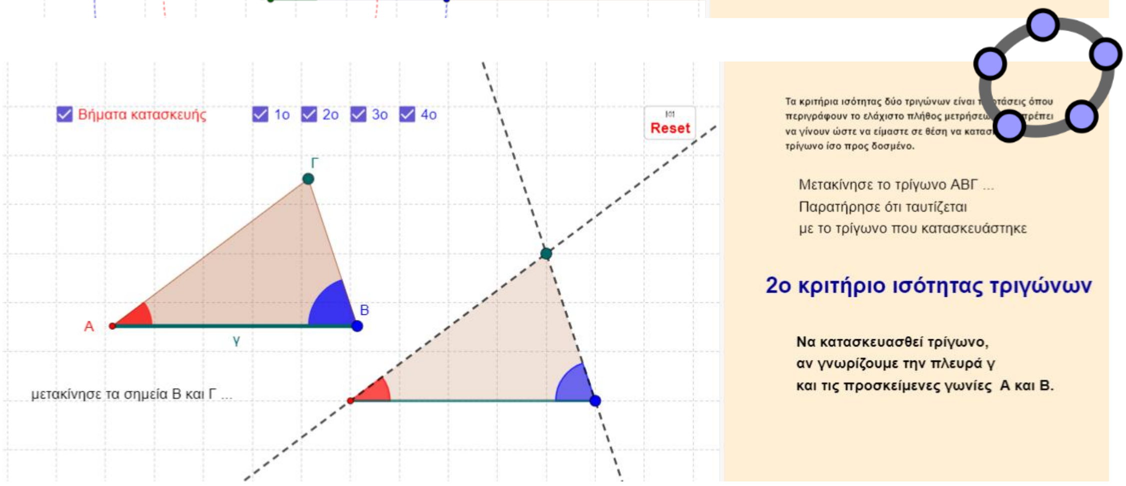
1. Τα κριτήρια ισότητα τριγώνων εισάγονται ως προτάσεις που μας πληροφορούν ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός κύριων στοιχείων ενός τριγώνου που πρέπει να γνωρίζουμε ώστε μετά να είμαστε σε θέση να το κατασκευάσουμε.

2. Με την 1η δραστηριότητα, που μπορεί να γίνει ομαδό-συνεργατικά μέσα στη τάξη, οι μαθητές καταλήγουν στα τρία κριτήρια ισότητας δύο τριγώνων. (**ΠΜΑ-Γ.Ε-10.8**)

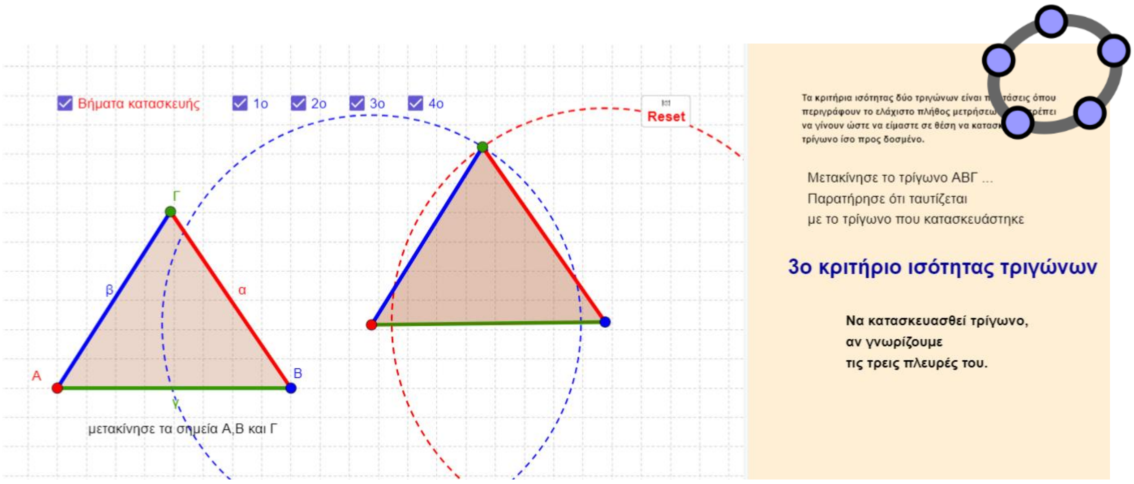
3. Στις επόμενες τρεις δραστηριότητες, που συνοδεύονται με αρχεία GeoGebra οι μαθητές κατασκευάζουν τρίγωνο όταν δίνονται: δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία (κριτήριο ΠΓΠ), μία πλευρά και οι δύο προσκείμενες γωνίες (κριτήριο ΓΠΓ) και τέλος τρεις πλευρές (κριτήριο ΠΠΠ). Στις εφαρμογές δίνεται η δυνατότητα της τοποθέτησης του αρχικού τριγώνου πάνω σε αυτό που κατασκευάζεται ώστε να εξακριβώσουμε την ορθότητα του ισχυρισμού περί ισότητας των δύο τριγώνων. (**ΠΜΑ-Γ.Ε.-10.9**)



Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία



Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία



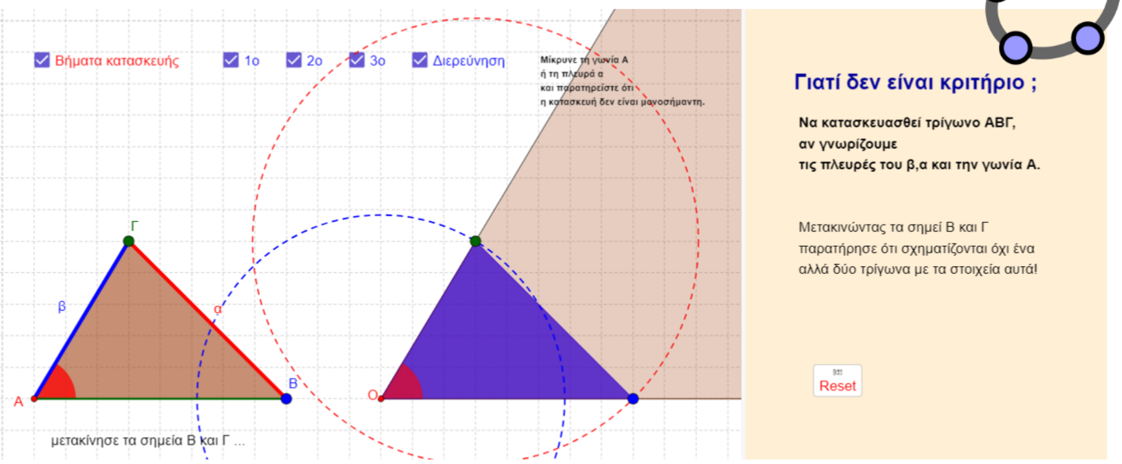
Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία

Η διαπραγμάτευση μέσω των εφαρμογών είναι απλή και κατευθυνόμενη.

4. Γίνεται αναφορά στην διαφορά των εννοιών «σχεδιάστε» και «κατασκευάστε» εξηγώντας παράλληλα το γιατί η Ευκλείδεια παράδοση απαιτεί τις όποιες κατασκευές να γίνονται με κανόνα και διαβήτη.

5. Εφόσον έχει ήδη αναφερθεί το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου δίνεται και το $4^{ο}$ κριτήριο, μία πλευρά, μία προσκείμενη γωνία και η απέναντι της πλευράς γωνία.

6. Ακολουθεί μία διερευνητική δραστηριότητα που υποστηρίζεται με αρχείο GeoGebra όπου οι μαθητές καλούνται να δικαιολογήσουν γιατί η πρόταση «Δύο τρίγωνα που έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία και μία οποιαδήποτε γωνία του ενός ίση με μία γωνία του άλλου, είναι ίσα» δεν αποτελεί κριτήριο ισότητας.



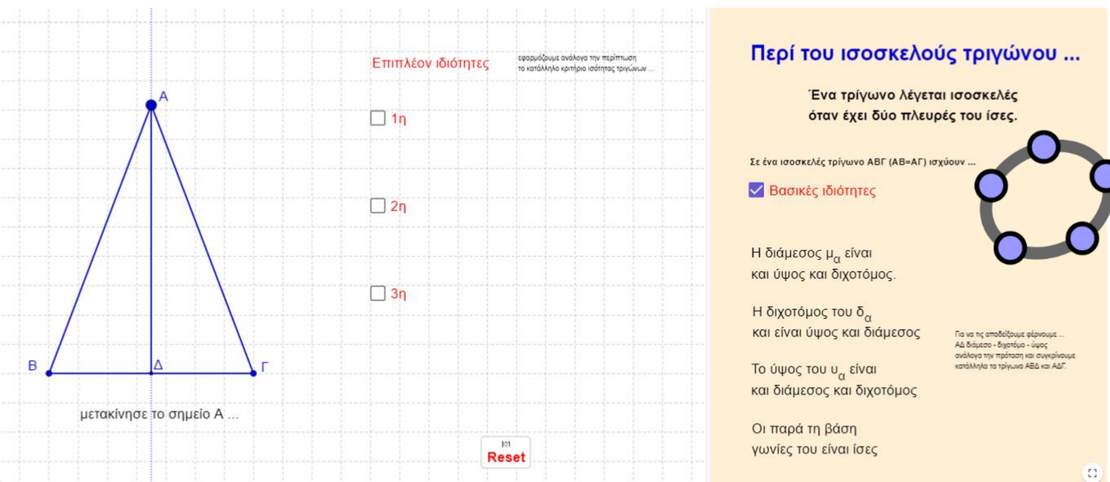
Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία

Οι μαθητές μετακινώντας τα σημεία Β και Γ παρατηρούν ότι η κατασκευή δεν είναι μονοσήμαντη. Δηλαδή ανάλογα της γωνίας και των μηκών β και γ έχουμε την δυνατότητα να κατασκευάσουμε διαφορετικά τρίγωνα με τα στοιχεία αυτά. Άρα τα στοιχεία αυτά δεν συνιστούν κριτήριο ισότητας τριγώνων.

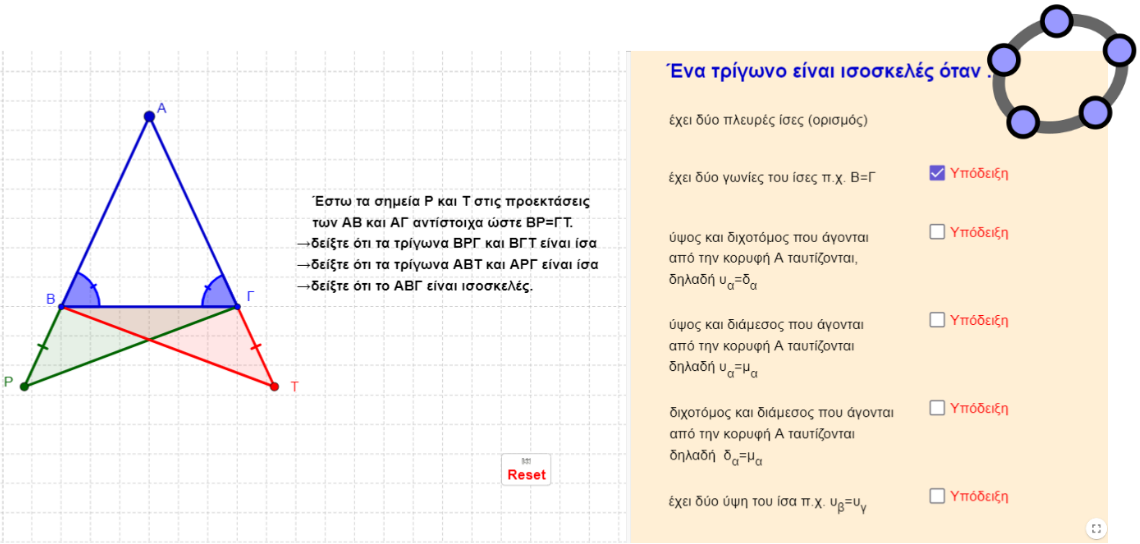
7. Στη συνέχεια αναφέρονται και αποδεικνύονται δύο επιπλέον κριτήρια που ισχύουν όταν συγκρίνουμε ορθογώνια τρίγωνα. (**ΠΜΑ-Γ.Ε-10.8**). Τελικά καταλήγουμε σε διατυπώσεις ίδιες με αυτές που οι μαθητές έχουν γνωρίσει στο Γυμνάσιο.

8. Η ιστορία με τον Monge και το Ναπολέοντα που ακολουθεί, μπορεί να αποτελέσει αφορμή για τους μαθητές να μάθουν να χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των ίσων τριγώνων στην επίλυση μαθηματικών και ρεαλιστικών προβλημάτων. Η δραματοποίηση της ιστορίας από μέρους του καθηγητή – μέσα στην τάξη μπορεί να παρακινήσει πολλούς μαθητές στην διαδικασία της οπτικοποίησης του προβλήματος και άρα της δικαιολόγησης του ερωτήματος που θέτει το κείμενο. (**ΠΜΑ-Γ.Ε-10.11**)

9. Ως απάντηση στο ερώτημα που χρησιμεύον όλα τα παραπάνω οι μαθητές εξερευνούν τις ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου και αποδεικνύουν κριτήρια ώστε ένα τρίγωνο να είναι ισοσκελές. (**ΠΜΑ – Γ.Ε-10.10**)
Μετά την ολοκλήρωση των αποδείξεων δίνεται συνοπτικά πίνακας επανάληψης με της ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου αλλά και με το τι προσπαθούμε να βρούμε ώστε να αποδείξουμε ότι ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές. Η επανάληψη αυτή υποστηρίζεται με δύο αρχεία GeoGebra που οπτικοποιούν τα παραπάνω. Η λειτουργία των εφαρμογών είναι απλή – κατευθυνόμενη και συγχρόνως υπηρετεί την συστηματική καταγραφή – επανάληψη των όσων γνωρίζουμε μέχρι τώρα.



Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία



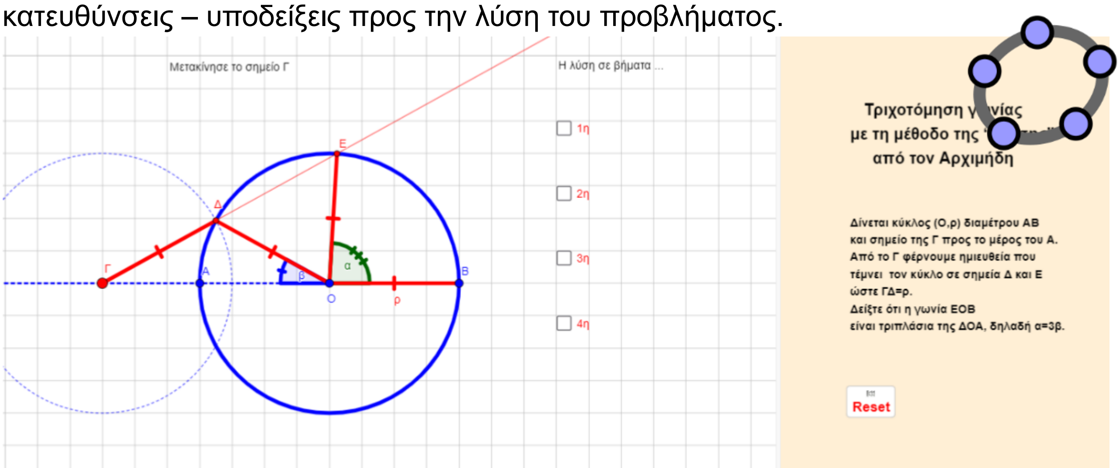
Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία

10. Στα λυμένα παραδείγματα που ακολουθούν και αναφέρονται στα ισοσκελή τρίγωνα καταδεικνύουμε στους μαθητές μας τη σημασία που παίζει στη γεωμετρία το μεγάλο και καθαρό σχήμα.
Επίσης τονίζουμε στους μαθητές την ανάγκη:

- να σχεδιάζουμε τις γεωμετρικές μορφές που η εκφώνηση της άσκησης επιτάσσει,
- να σημειώνουμε κάθε πληροφορία στο σχήμα μας
- και τέλος να σημειώνουμε τις υποθέσεις και τα συμπεράσματα του προβλήματος.

11. Προτείνουμε μία εργασία που αναφέρεται στην μέθοδο της «νεύσης» - κίνησης του Αρχιμήδη για την λύση του προβλήματος της τριχοτόμησης μιας οποιασδήποτε γωνίας.

Η εργασία υποστηρίζεται με εφαρμογή GeoGebra απλή στην χρήση της που δίνει στον μαθητή κατευθύνσεις – υποδείξεις προς την λύση του προβλήματος.

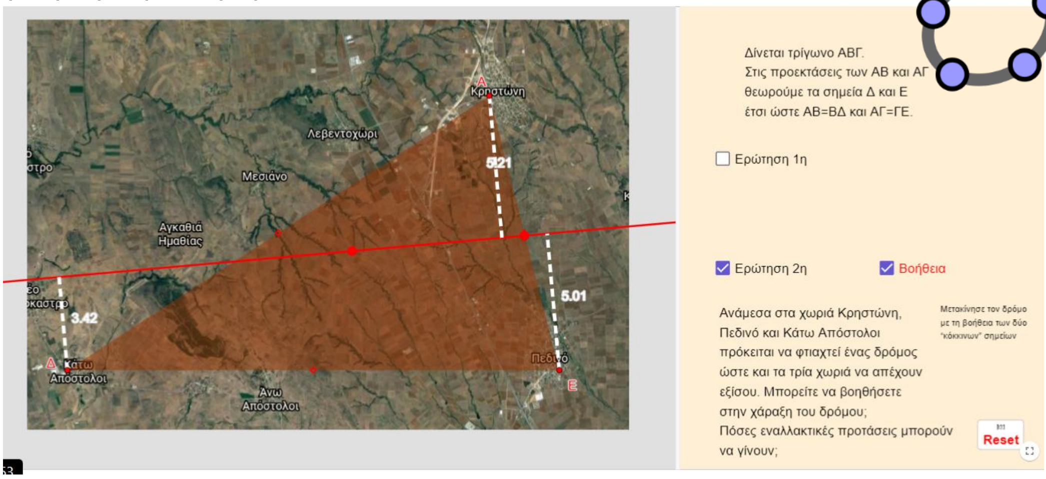


Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία

12. Στην συνέχεια αναφερόμαστε σε βασικές κατασκευές ώστε οι μαθητές με χρήση κανόνα και διαβήτη να κατασκευάζουν τρίγωνα όταν δίνονται κάποια από τα βασικά στοιχεία τους. Επίσης γίνεται και η «Ευκλείδεια» κατασκευή της παράλληλης από σημείο προς δοσμένη ευθεία.

13. Στις ασκήσεις που ακολουθούν υπάρχουν οι βασικές που το χαρακτηριστικό τους είναι η συμμετρία του σχήματος, προβλήματα που περιέχουν πρακτικό θέμα, αλλά και άλλες όπου η ισότητα ανακαλύπτεται σε σχήμα ασύμμετρο.

Στην άσκηση 9 δίνεται η δυνατότητα στον μαθητή να ανοίξει εφαρμογή GeoGebra ώστε να βοηθηθεί στην λύση της άσκησης αλλά και να διερευνήσει το ρεαλιστικό πρόβλημα που ακολουθεί την τυπική γεωμετρική άσκηση.



Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία

14. Τέλος αναφέρουμε το πρόβλημα του Langley – την ποιο δύσκολη άσκηση της στοιχειώδους Γεωμετρίας. Επειδή παρουσιάζει δυσκολίες δίνονται υποδείξεις και προτρέπουμε τους μαθητές να ασχοληθούν μαζί της ως εργασία.

2.2 Η έννοια του γεωμετρικού τόπου και οι εφαρμογές του.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ

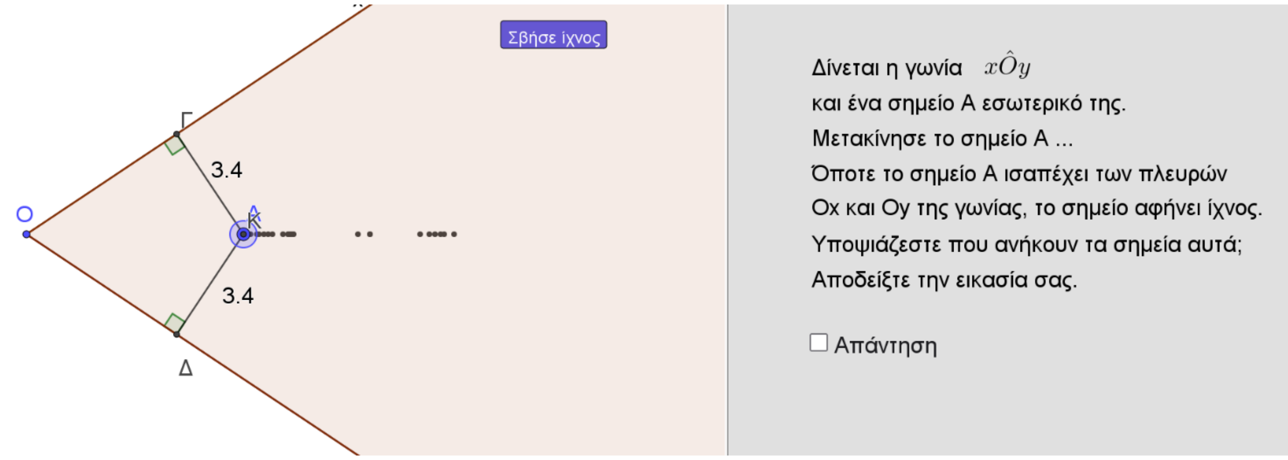
- Έννοια γεωμετρικού τόπου.
- Μεσοκάθετος τμήματος ως γεωμετρικός τόπος.
- Διχοτόμος γωνίας ως γεωμετρικός τόπος.
- Κατασκευές με κανόνα και διαβήτη μεσοκάθετης ευθυγράμμου τμήματος, και διχοτόμου γωνίας και αιτιολόγηση διαδικασίας.
- Απλοί γεωμετρικοί τόποι.

ΠΜΑ.
Γ.Ε.10.12. Αναγνωρίζουν τη διχοτόμο γωνίας και τη μεσοκάθετο ευθύγραμμου τμήματος ως γεωμετρικούς τόπους σημείων και αποδεικνύουν τις ιδιότητες τους.
Γ.Ε.10.13. Κατασκευάζουν με κανόνα και διαβήτη τη διχοτόμο γωνίας και τη μεσοκάθετο ευθυγράμμου τμήματος και αιτιολογούν την διαδικασία.
Γ.Ε.10.14. Βρίσκουν απλούς γεωμετρικούς τόπους εξηγώντας το συλλογισμό τους.

Διδακτική διαδικασία

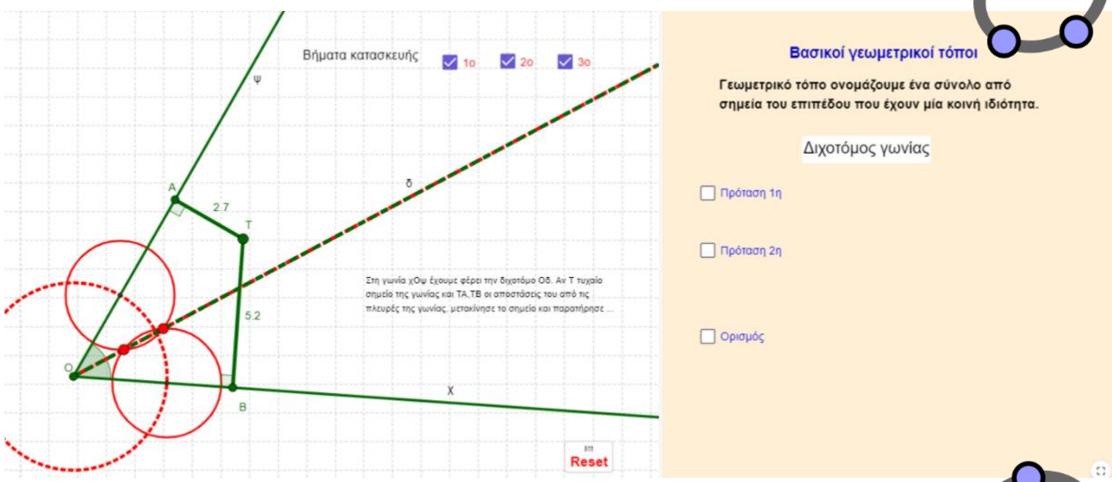
1. Μέσω της προτεινόμενης δραστηριότητας γίνεται η εισαγωγή της έννοιας του γεωμετρικού τόπου.

2. Ακολούθως οι μαθητές αναγνωρίζουν την μεσοκάθετο ενός ευθυγράμμου τμήματος και την διχοτόμο μιας γωνίας ως γεωμετρικούς τόπους και αποδεικνύουν τις σχετικές προτάσεις. (**ΠΜΑ-Γ.Ε-10.12**)
Ειδικά για την διχοτόμο δίνεται εφαρμογή GeoGebra όπου σε περιβάλλον δυναμικής Γεωμετρίας ο μαθητής ανακαλύπτει τη βασική ιδιότητα της διχοτόμου, ώστε να την ορίσει τελικά ως γεωμετρικό τόπο.

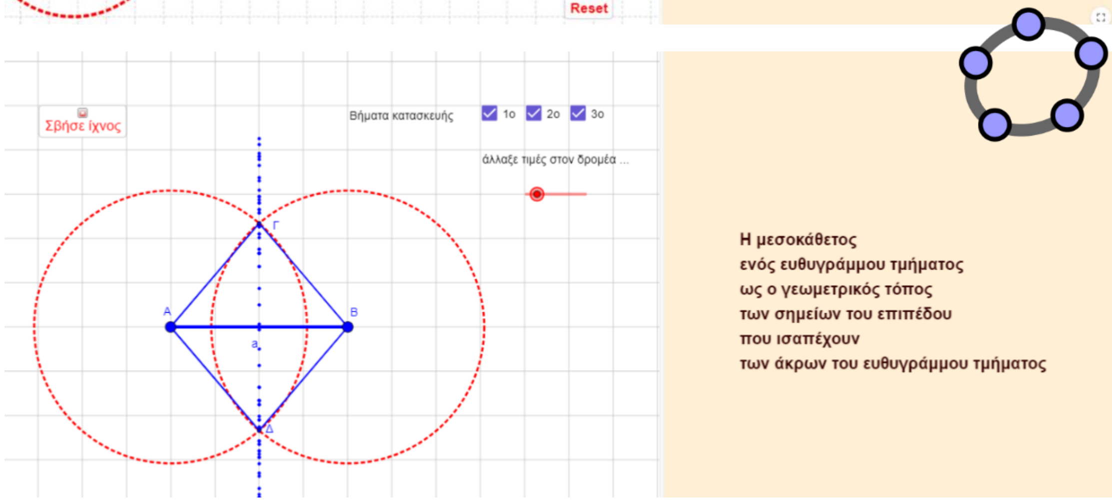


3. Ως απάντηση στο ερώτηση *«Που χρησιμεύουν όσα έχουμε αναφέρει;»* οι μαθητές γνωρίζουν την κατασκευή της διχοτόμου μιας γωνίας και της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος αιτιολογώντας τις διαδικασίες κατασκευής. (**ΠΜΑ-Γ.Ε-10.13**)

Με τις κατασκευές μπορούν οι μαθητές να εμπλακούν και με την βοήθεια των 2 εφαρμογών GeoGebra που υποστηρίζουν την ενότητα αυτή.



Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία



Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία

4. Στη συνέχεια ασχολούμαστε με προβλήματα γεωμετρικών τόπων που ανάγονται στους ήδη γνωστούς. (**ΠΜΑ-Γ.Ε-10.14**)

5. Από τις ασκήσεις που ακολουθούν κάποιες μοντελοποιούν προβλήματα από την πραγματική ζωή, ενώ κάποιες άλλες απαιτούν την ανάπτυξη συνδυαστικών δεξιοτήτων από μέρους των μαθητών.

Ειδικά στην 1η άσκηση που διαπραγματεύεται ένα ρεαλιστικό πρόβλημα οι μαθητές μπορούν να την αντιμετωπίσουν μέσω εφαρμογής GeoGebra. Μας δίνεται η δυνατότητα με τρόπο δυναμικό – να αλλάζουμε θέσεις στα διάφορα σημεία – να καταλήξουμε σε εικασίες που μας βοηθούν στην λύση του προβλήματος.

Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία

<u>**Ως ανακεφαλαίωση**</u> δίνεται :

Α. Μία σύντομη παρουσίαση των όσων μάθαμε μέχρι τώρα – Τυπολόγιο.

Β. Ένα ενδεικτικό φύλλο αυτοαξιολόγησης.

3ο Κεφάλαιο / Ανισοτικές σχέσεις – εφαπτομένη κύκλου

3.1 Ανισοτικές σχέσεις σε τρίγωνο.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ

- Τριγωνική ανισότητα.
- Σύνδεση σχέσης γωνιών με αντίστοιχη σχέση πλευρών σε τρίγωνο.

Π.Μ.Α

Γ.Ε.10.15 Διερευνούν και αποδεικνύουν βασικές ανισοτικές σχέσεις στοιχείων τριγώνου (τριγωνική ανισότητα και σύνδεση σχέσης πλευρών με σχέση αντίστοιχων γωνιών).

Διδακτική διαδικασία

1. Ως αποτέλεσμα ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180^o οι μαθητές μπορούν να εξάγουν ως συμπέρασμα τις προτάσεις:

Α) Η εξωτερική γωνία είναι μεγαλύτερη από κάθε μία από τις απέναντι εσωτερικές π.χ. $\mathrm{B}_{\varepsilon\xi} > \hat{\Gamma}$, $\mathrm{B}_{\varepsilon\xi} > \mathrm{A}$.

Β) Ένα τρίγωνο έχει το πολύ μία ορθή γωνία ή μία το πολύ αμβλεία γωνία.

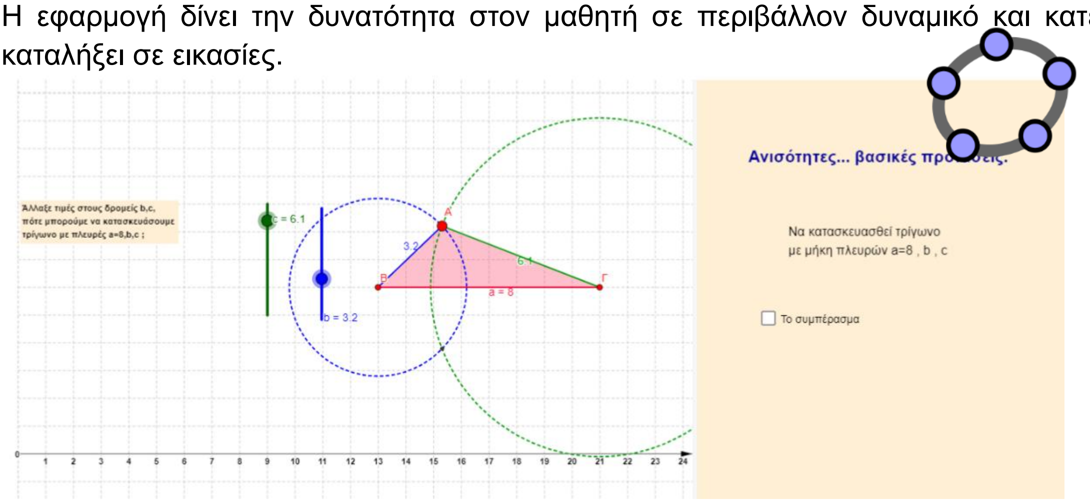
Γ) Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η μεγαλύτερη γωνία είναι η ορθή.

Δ) Σε ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο η μεγαλύτερη γωνία είναι η αμβλεία.

2. Με την 1η δραστηριότητα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα. Η απόδειξη δίνεται αναλυτικά γραμμένη μετά την δραστηριότητα. Είναι μία πολύ καλή ευκαιρία να γνωρίσουν οι μαθητές ξανά την αποδεικτική δύναμη της μεθόδου στην εις άτοπον απαγωγής.

3. Με την 2η δραστηριότητα, που συνοδεύεται από αντίστοιχη εφαρμογή GeoGebra, οι μαθητές καταλήγουν στην τριγωνική ανισότητα. Ακολούθως διατυπώνουν τη συνθήκη που πρέπει να ισχύει ώστε τρία τμήματα να μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην κατασκευή ενός τριγώνου. Στη συνέχεια δίνεται αναλυτικά η απόδειξη της συνθήκης.

Η εφαρμογή δίνει την δυνατότητα στον μαθητή σε περιβάλλον δυναμικό και κατευθυνόμενο να καταλήξει σε εικασίες.



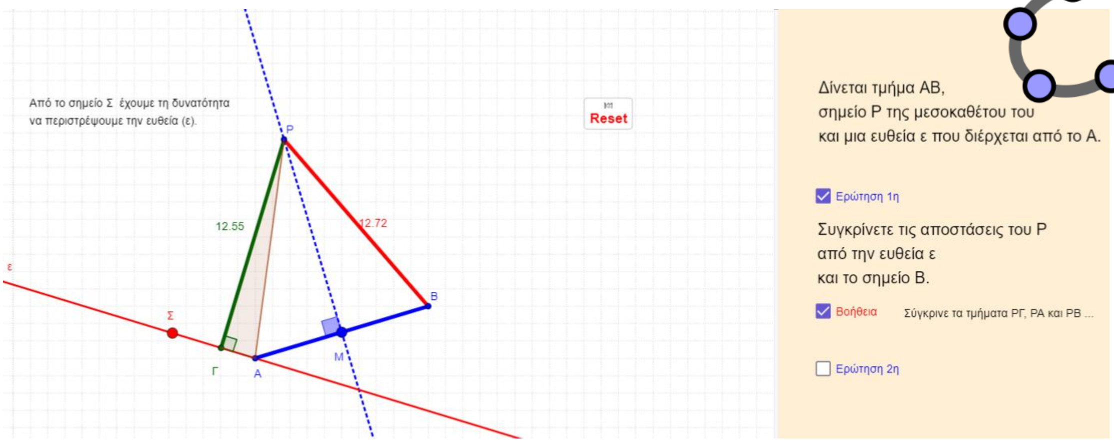
Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία

Με τις δραστηριότητες 1 και 2, οι μαθητές διερευνούν βασικές ανισοτικές σχέσεις στοιχείων τριγώνου (τριγωνική ανισότητα και σύνδεση σχέσης πλευρών με σχέση αντίστοιχων γωνιών). (**ΠΜΑ Γ.Ε.10.15).**

4. Στα παραδείγματα που ακολουθούν γίνεται προσπάθεια να παρουσιαστεί ο τρόπος σκέψης-λύσης δίνοντας παράλληλα μια σειρά από οδηγίες αντιμετώπισης ασκήσεων ανισοτικών σχέσεων.

5. Οι ερωτήσεις κατανόησης και οι ασκήσεις καλύπτουν ένα μεγάλο φάσμα ασκήσεων, από τις κλασικές ως και ρεαλιστικές καταστάσεις – προβλήματα.

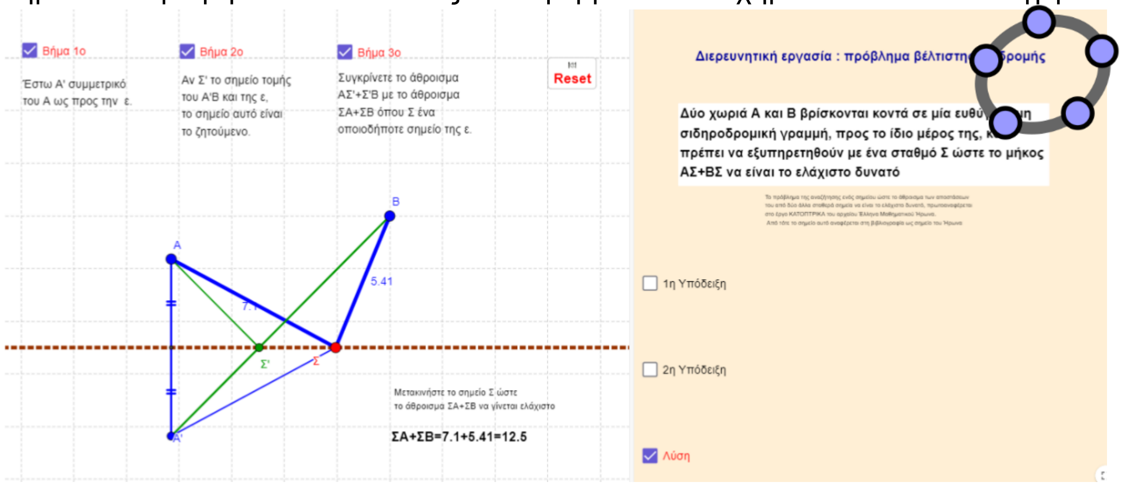
Ειδικά στην άσκηση 3 δίνεται η δυνατότητα στο μαθητή μέσω εφαρμογής GeoGebra σε περιβάλλον δυναμικό να ασχοληθεί με την άσκηση αλλά και με επιπλέον ερωτήματα.



Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία

6. Στο τέλος παρουσιάζεται ως άσκηση το σημείο του Ήρωνος και δύο ακόμα ρεαλιστικές καταστάσεις εφαρμογής του. Με την βοήθεια των εφαρμογών GeoGebra οι μαθητές μπορούν να εικάσουν και τελικά να οδηγηθούν στην επίλυση των προβλημάτων.

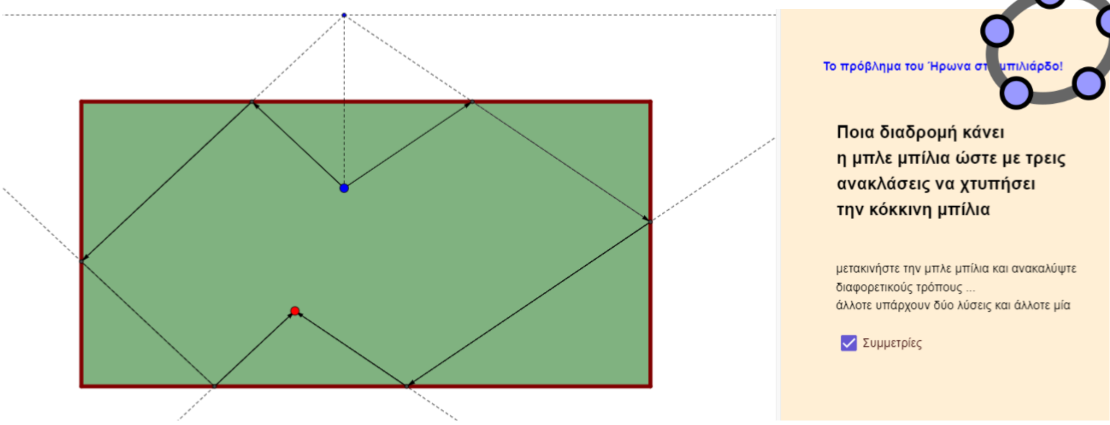
Η εφαρμογή για το σημείο του Ήρωνα, δίνει την δυνατότητα στους μαθητές, να αλλάξουν θέση σε σημεία – να μετρήσουν αποστάσεις να παρέμβουν στο σχήμα και τελικά να οδηγηθούν στην λύση.



Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία

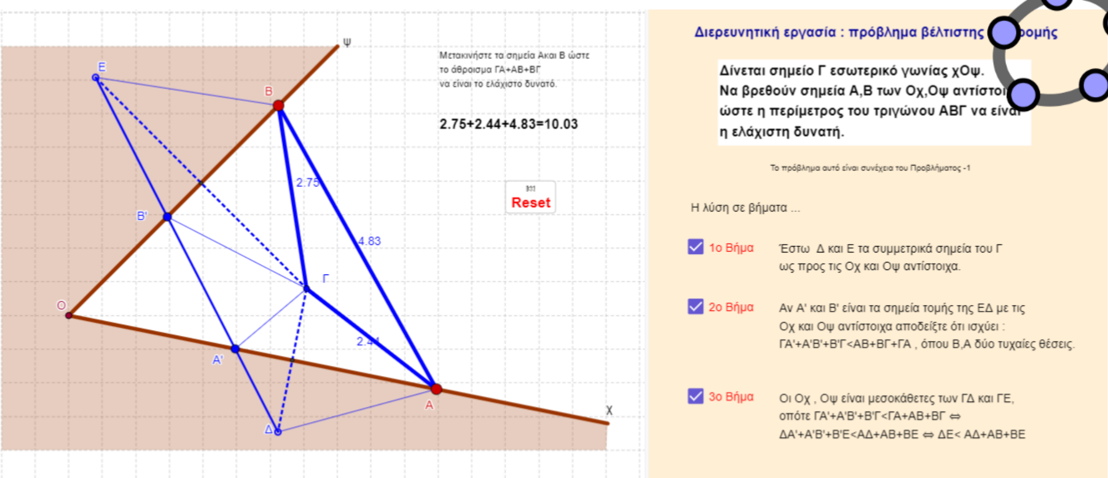
Ως ρεαλιστική εφαρμογή του Σημείου του Ήρωνα αναφέρετε το μπιλιάρδο!

Οι ανακλάσεις στα πλαίσια του τραπεζιού ακολουθούν την αρχή του πιο σύντομου δρόμου. Η παρουσίαση του θέματος υποστηρίζεται με εφαρμογή GeoGebra όπου ο μαθητής με τρόπο δυναμικό μπορεί να αλλάξει θέση σε σημεία και να διατυπώσει εικασίες.

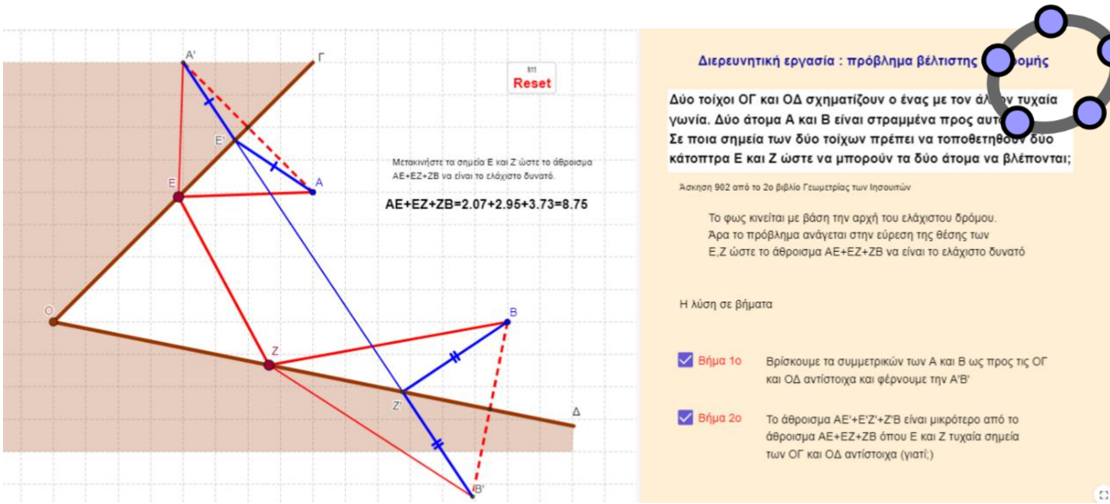


Περιγραφή
Εφαρμογής
Πληροφοριακά
Στοιχεία

Οι δύο εργασίες που καλούνται να ασχοληθούν οι μαθητές είναι εφαρμογές του σημείου του Ήρωνος. Τα ερωτήματα που τίθενται μπορούν να αντιμετωπιστούν από τους μαθητές με τη βοήθεια δυναμικών εφαρμογών GeoGebra. Εκεί οι μαθητές είναι σε θέση να μετρήσουν αποστάσεις να αλλάξουν θέση σε σημεία και τελικά να εικάσουν την βέλτιστη λύση.



Περιγραφή
Εφαρμογής
Πληροφοριακά
Στοιχεία



Περιγραφή
Εφαρμογής
Πληροφοριακά
Στοιχεία

<u>3.2 Χορδή κύκλου.</u>

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ

- Ισότητα τόξων, χορδών και αποστημάτων.

ΠΜΑ

Γ.Ε.10.16 Αποδεικνύουν ότι, σε ίσους κύκλους, ίσα τόξα ορίζουν ίσες χορδές και ίσα αντίστοιχα σε αυτές αποστήματα. Διατυπώνουν και ελέγχουν τους αντίστροφους ισχυρισμούς.

Διδακτική διαδικασία

1. Στην αρχή οι μαθητές ανακαλούν έννοιες όπως χορδή – τόξο – απόστημα.

2. Η δραστηριότητα με το ραντάρ έχει σκοπό οι μαθητές να εικάσουν την σχέση που υπάρχει ανάμεσα στις χορδές και τα αποστήματά τους, ώστε ακολούθως να αποδείξουμε ότι «σε ίσους κύκλους, ίσα τόξα ορίζουν ίσες χορδές και ίσα αντίστοιχα σε αυτές αποστήματα» και να είναι σε θέση να «Διατυπώνουν και ελέγχουν τους αντίστροφους ισχυρισμούς» . (**ΠΜΕ–Γ.Ε. 10.16)**

<u>3.3 Εφαπτομένη κύκλου.</u>

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ

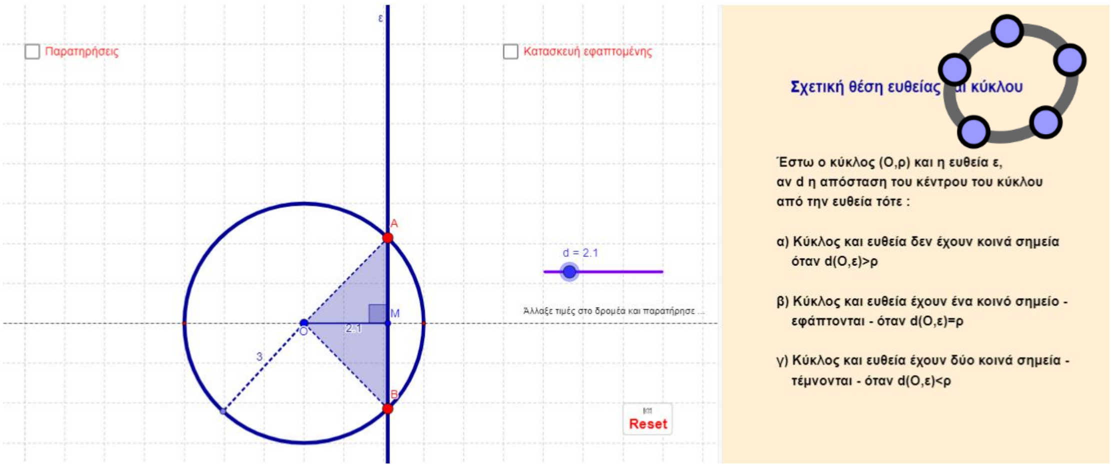
- Σχετικές θέσεις μιας ευθείας και ενός κύκλου.
- Κατασκευή εφαπτομένης σε σημείο του κύκλου.
- Σχετικές θέσεις δύο κύκλων..

ΠΜΑ

Γ.Ε.1017 Κατασκευάζουν εφαπτομένη κύκλου σε σημείο του με κανόνα και διαβήτη.

Διδακτική διαδικασία

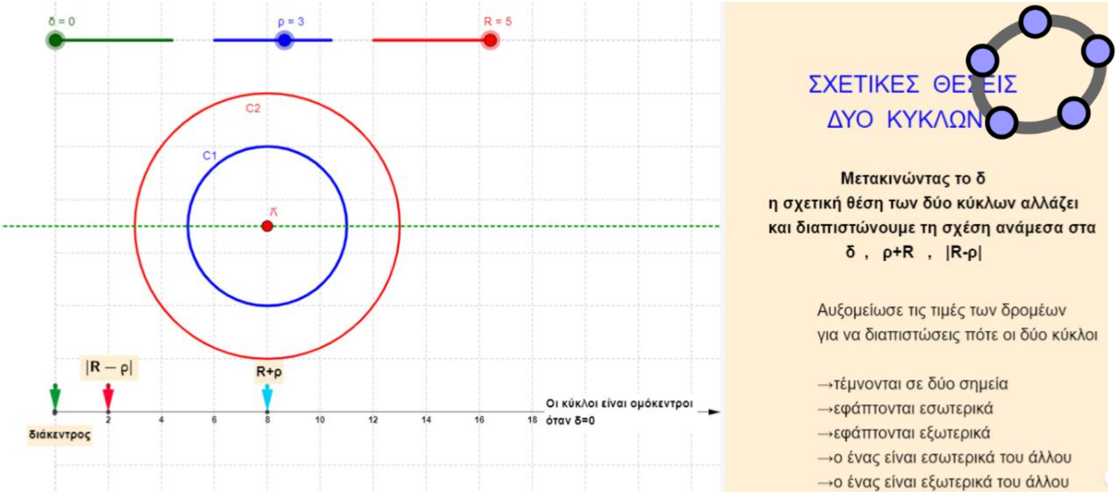
1. Με την βοήθεια εφαρμογής GeoGebra οι μαθητές ασχολούνται με το πρόβλημα των σχετικών θέσεων ευθείας και κύκλου και ανακαλύπτουν αλγεβρικές σχέσεις που συνδυάζουν την ακτίνα (ρ) του κύκλου και την απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία d(Ο,ε) οι οποίες αποτελούν το αλγεβρικό ισοδύναμο των όσων έχουν αντιληφθεί γεωμετρικά.



Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία

2. Ως απάντηση στο ερώτηση που χρησιμεύουν όσα έχουμε αναφέρει οι μαθητές γνωρίζουν την κατασκευή με κανόνα και διαβήτη της εφαπτομένης από σημείο που ανήκει στον κύκλο αλλά και από εξωτερικό σημείο του κύκλου. (**ΠΜΕ-Γ.Ε-10.17)**

3. Με την βοήθεια εφαρμογής GeoGebra οι μαθητές ασχολούνται με το πρόβλημα των σχετικών θέσεων δύο κύκλων και ανακαλύπτουν αλγεβρικές σχέσεις που συνδυάζουν τις ακτίνες R, ρ και την διάκεντρο (δ) οι οποίες αποτελούν το αλγεβρικό ισοδύναμο των όσων έχουν αντιληφθεί γεωμετρικά.



Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία

4. Οι ερωτήσεις κατανόησης και τα λυμένα παραδείγματα συστηματοποιούν τα όσα έχουμε αναφέρει παραπάνω.

5. Οι ασκήσεις που ακολουθούν απαιτούν την ανάπτυξη συνδυαστικών δεξιοτήτων από μέρους των μαθητών αφού εξετάζουν και θέματα προηγούμενων παραγράφων.

6. Ως τελική εργασία – άσκηση περιγράφεται η διαδικασία με την οποία με χρήση κατάλληλου γεωμετρικού οργάνου τριχοτομούμε δεδομένη γωνία. Οι μαθητές καλούνται να αιτιολογήσουν την όλη διαδικασία.

<u>Ως ανακεφαλαίωση</u> δίνεται :

Α. Μία σύντομη παρουσίαση των όσων μάθαμε μέχρι τώρα – Τυπολόγιο.

Β. Ένα ενδεικτικό φύλλο αυτοαξιολόγησης.

4ο Κεφάλαιο / Παραλληλόγραμμα

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ

- Ορισμοί και ιδιότητες παραλληλογράμμων, ορθογωνίων, ρόμβων και τετραγώνων.

Π.Μ.ΑΓ.Ε.10.18.

Διερευνούν και αποδεικνύουν τις βασικές ιδιότητες του παραλληλογράμμου και των ειδικών παραλληλογράμμων (ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο) και διακρίνουν αυτές που τα χαρακτηρίζουν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Επειδή οι στόχοι που περιέχονται στο Π.Μ.ΑΓ.Ε.10.18. είναι πολλοί χωρίσθηκαν στα παρακάτω δύο μέρη που θα εξεταστούν χωριστά:

Α. Στόχοι που αναφέρονται στο παραλληλόγραμμο.

Β. Στόχοι που αναφέρονται στα ειδικά παραλληλόγραμμα (ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο).

4.1. Παραλληλόγραμμο

Διδακτική διαδικασία

1. Αφού δώσουμε τον ορισμό του παραλληλογράμμου οι μαθητές με την 1η δραστηριότητα, συγκρίνοντας τρίγωνα, φθάνουν στο σημείο να ανακαλύψουν τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου. Ακολούθως με τη βοήθεια της 2ης δραστηριότητας οι μαθητές θα ανακαλύψουν τρόπους με τους οποίους μπορούμε να διαπιστώσουμε αν ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο. Έπειτα αποδεικνύονται τα αντίστοιχα κριτήρια.

Με τις δραστηριότητες 1 και 2 καλύπτεται το τμήμα του **ΠΜΑ.Γ.Ε.10.18** που αναφέρεται στο παραλληλόγραμμο.

Η δραστηριότητα με το σχοινί είναι ένα ενδιαφέρον θέμα της Γεωμετρίας έξω από την αίθουσα. Οι μαθητές καλούνται να βρουν τρόπους κατασκευής ενός παραλληλογράμμου έχοντας ως εργαλείο ένα κομμάτι σχοινί. Τι μπορεί να συμβεί;

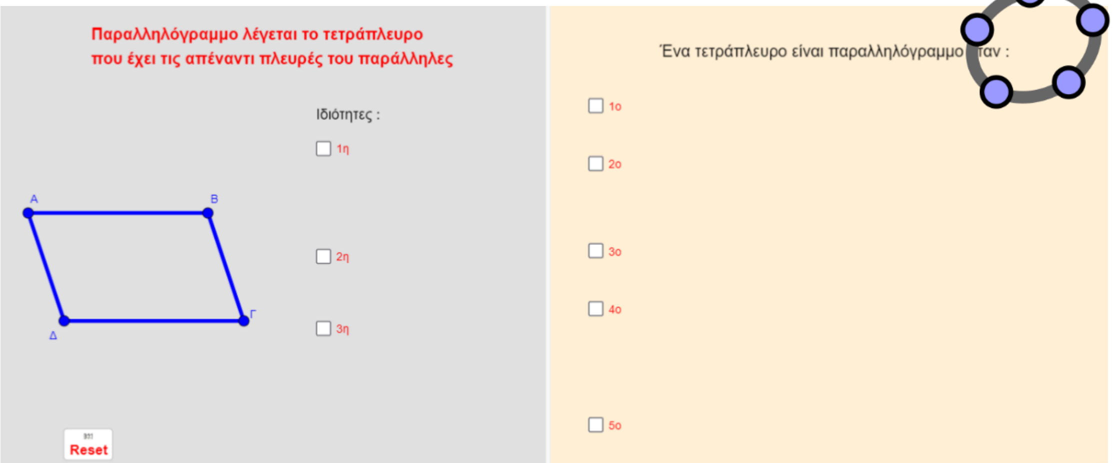
Μπορεί για παράδειγμα να κόψουν το σχοινί σε τέσσερα κομμάτια x, x, y και y και κρατώντας τα να σταθούν σε σημεία που σχηματίζουν τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.

Άλλη δυνατότητα είναι να κόψουν το σχοινί σε δύο τμήματα x και y. Διπλώνοντας τα μπορούν να βρουν τα μέσα των δύο τμημάτων. Στη συνέχεια ένας μαθητής κρατά τα δύο τμήματα στο μέσο τους και οι υπόλοιποι τεντώνουν τα δύο τμήματα από τα άκρα τους. Σχηματίζεται έτσι ένα τετράπλευρο που οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Τέλος μπορεί αφού κόψουν το σχοινί σε δύο ίσα μέρη να σχηματίσουν με αυτά δύο ίσα ισοσκελή τρίγωνα με κοινή τη βάση τους. Με τον τρόπο αυτό σχηματίζεται ένα τετράπλευρο που έχει τις απέναντι γωνίες του ίσες.

Το πως θα εξελιχθεί η δραστηριότητα δεν το γνωρίζει κανείς, το σίγουρο είναι ότι θα γίνει αιτία για πολλές ωραίες και ενδιαφέρουσες συζητήσεις μετά μέσα στην τάξη.

Στο αρχείο GeoGebra που υποστηρίζει την παράγραφο παρουσιάζεται συνολικά όλη η θεωρία του παραλληλογράμμου.

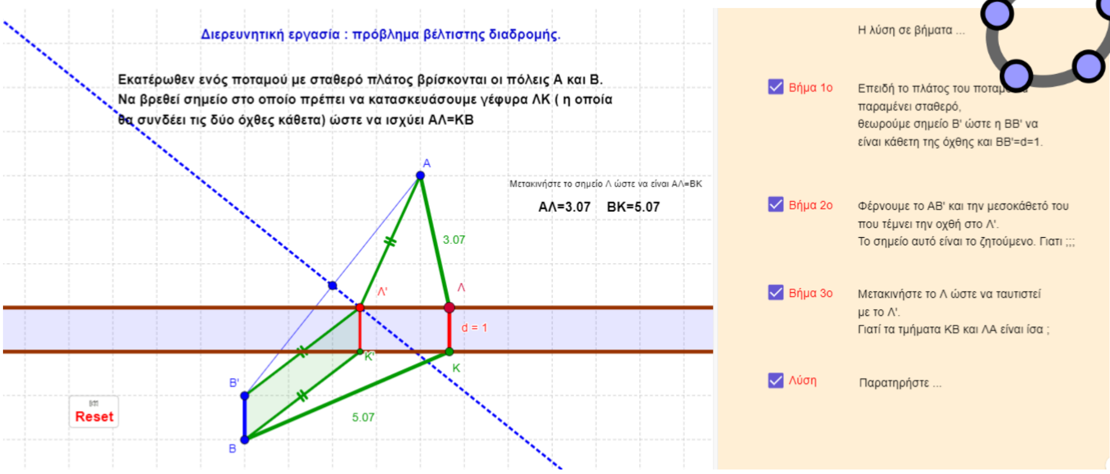


Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία

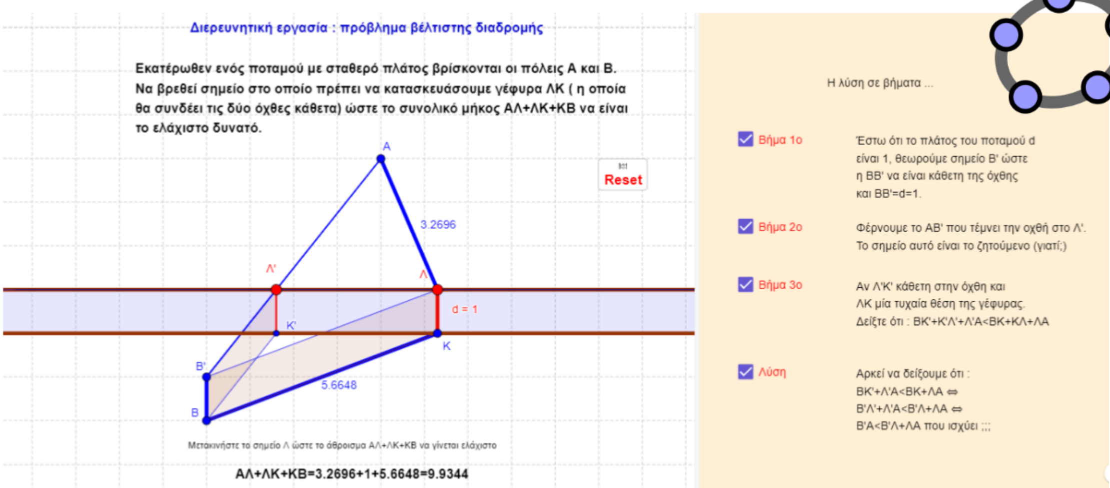
2. Τα λυμένα παραδείγματα που ακολουθούν παρουσιάζονται αναλυτικά, ώστε να φανεί ο επαγωγικός τρόπος σκέψης που ακολουθούμε για την λύση των ασκήσεων της γεωμετρίας.

3. Οι ασκήσεις που ακολουθούν είναι κλασικές αλλά υπάρχουν και εκείνες που προκαλούν. Με τον τρόπο αυτό παρακινούμε τους μαθητές μας να ασχοληθούν με θέματα ρεαλιστικά.

4. Ως προτεινόμενες εργασίες δίνονται δύο προβλήματα βέλτιστης διαδρομής. Πρόκειται για κλασικά προβλήματα και υποστηρίζονται από αρχεία GeoGebra.



Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία



Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία

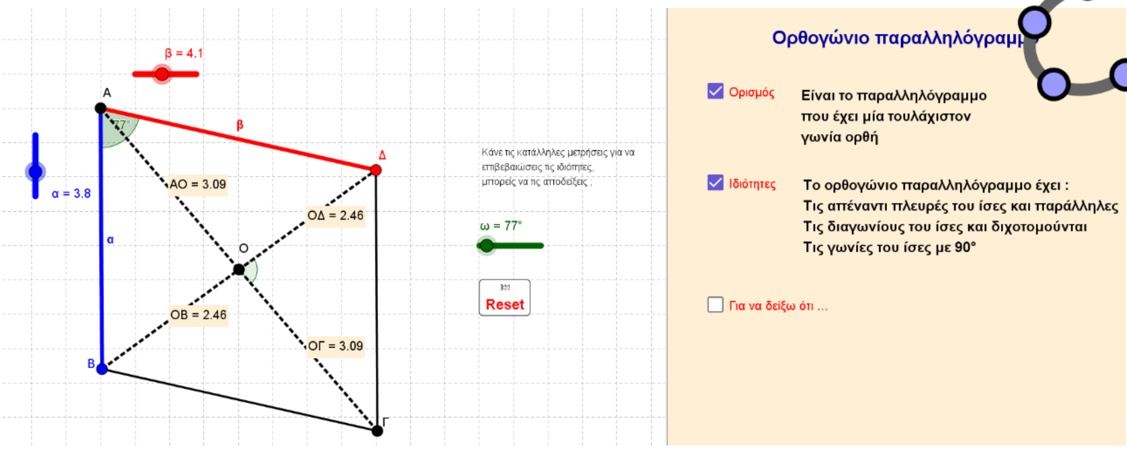
Με τη βοήθεια των εφαρμογών οι μαθητές μπορούν ακολουθώντας τις οδηγίες, να αλλάξουν θέση σε σημεία, να μετρήσουν αποστάσεις να παρέμβουν δυναμικά στην άσκηση και τελικά να εικάσουν και να οδηγηθούν στη βέλτιστη πρόταση.

4.2. Ειδικά παραλληλόγραμμα (ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο)

Διδακτική διαδικασία

1. Στην αρχή δίνεται ο ορισμός του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

2. Με τη βοήθεια της δραστηριότητας που ακολουθεί και συνοδεύεται με αρχείο GeoGebra οι μαθητές θα ανακαλύψουν τις ιδιότητες του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.



Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία

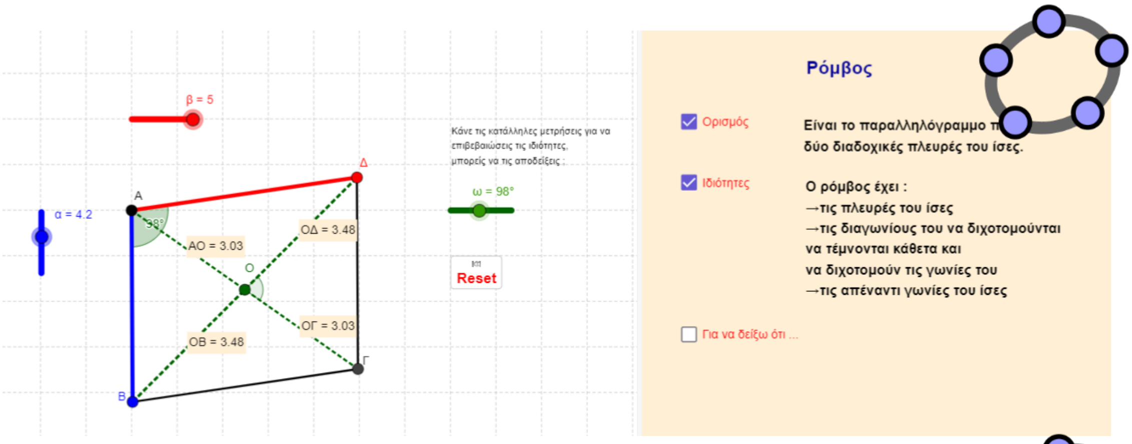
Το δυναμικό φύλλο εργασίας σε περιβάλλον GeoGebra που καλούνται να εργαστούν οι μαθητές τους επιτρέπει να αλλάζουν τιμές στους δρομείς διαμορφώνοντας παραλληλόγραμμα με διαφορετικά μήκη πλευρών, διαγώνιων και μέτρα γωνιών. Οι μαθητές έχουν το κατάλληλο εργαλείο για να καταλήξουν στις ιδιότητες που έχει το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

3. Μετά ακολουθεί η ανακάλυψη των προτάσεων με τις οποίες δείχνουμε αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο.

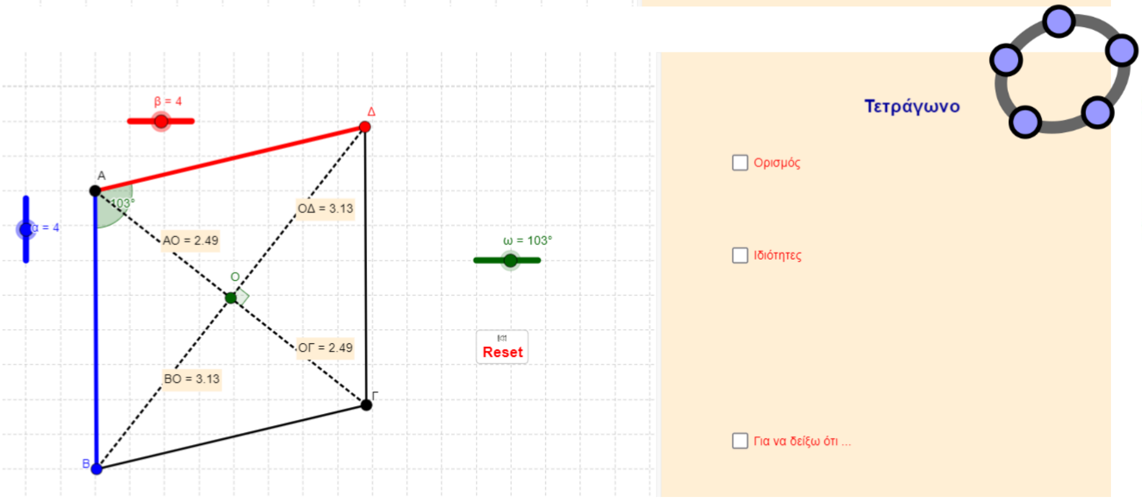
Η δραστηριότητα με το σχοινί είναι ένα ενδιαφέρον θέμα της Γεωμετρίας έξω από την αίθουσα. Οι μαθητές καλούνται να βρουν τρόπους κατασκευής ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου έχοντας ως εργαλείο ένα κομμάτι σχοινί.
Τι μπορεί να συμβεί;
Μπορεί να κόψουν το σχοινί σε δύο ίσα τμήματα και αφού τα διπλώσουν και βρουν τα μέσα τους. Στη συνέχεια ένας μαθητής κρατά τα δύο τμήματα στο μέσο τους και οι υπόλοιποι τεντώνουν τα δύο τμήματα από τα άκρα τους. Σχηματίζεται έτσι ένα τετράπλευρο που οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και είναι ίσες.

Τη σειρά που ακολουθήσαμε στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο δηλαδή – Ορισμός – Ιδιότητες μέσω δραστηριότητας – Αντίστροφες προτάσεις – την ακολουθούμε και στον ρόμβο και στο τετράγωνο.

4. Έτσι με τη βοήθεια εφαρμογών GeoGebra οι μαθητές ανακαλύπτουν τις ιδιότητες του ορθογωνίου, του ρόμβου και του τετραγώνου και μετά αποδεικνύουμε τις προτάσεις με τις οποίες είμαστε σε θέση να συμπεράνουμε πότε ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο ή ρόμβος ή τετράγωνο. Με τις εφαρμογές αυτές καλύπτεται το τμήμα του **ΠΜΑ.Γ.Ε.10.18** που αναφέρεται στο ορθογώνιο, στο ρόμβο και στο τετράγωνο.

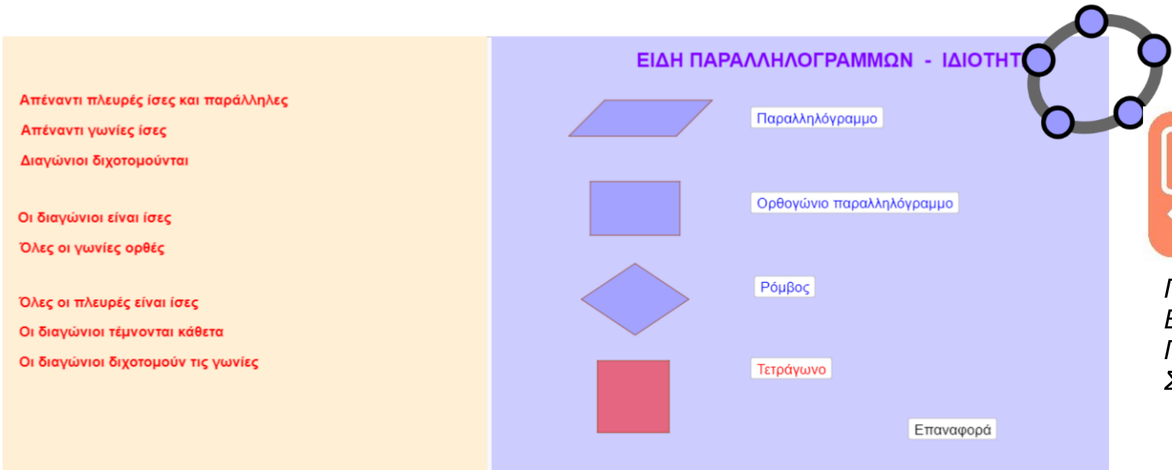


Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία



Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία

4. Με την βοήθεια δραστηριότητας που συνοδεύεται με εφαρμογή GeoGebra οι μαθητές εμπλέκονται σε μία διαδικασία με σκοπό να αποσαφηνίσουν τις ομοιότητες και τις διαφορές των τεσσάρων σχημάτων (παραλληλόγραμμο – ορθογώνιο παραλληλόγραμμο – ρόμβος – τετράγωνο). Η προσπάθεια αυτή της διάκρισης των σχημάτων συνεχίζεται και με τις ερωτήσεις κατανόησης.



Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία

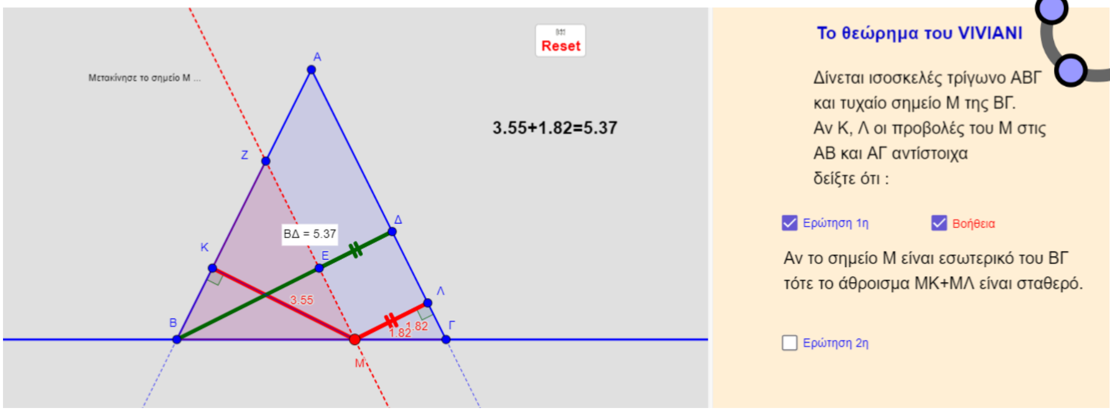
5. Στα λυμένα παραδείγματα ο τρόπος γραφής αποκαλύπτει τον επαγωγικό τρόπο εργασίας που ακολουθούμε για την λύση μιας άσκησης Γεωμετρίας. Ο στόχος μας είναι να παρουσιάσουμε υποδειγματικά τις λογικές ακολουθίες που συγκροτούν την λύση, έτσι ώστε ο μαθητής στην αρχή να μιμηθεί αλλά μετά να ανακαλύψει και τους δικούς του τρόπους – μεθόδους επίλυσης.

6. Οι ασκήσεις που ακολουθούν απαιτούν την ανάπτυξη συνδυαστικών δεξιοτήτων από μέρους των μαθητών αφού εξετάζουν και θέματα προηγούμενων παραγράφων.

7. Ως απάντηση στο ερώτημα που χρησιμεύουν όλα τα προηγούμενα, δίνεται ο ορισμός της μεσοπαραλλήλου και η κατασκευή της κοινής εφαπτομένης δύο κύκλων.

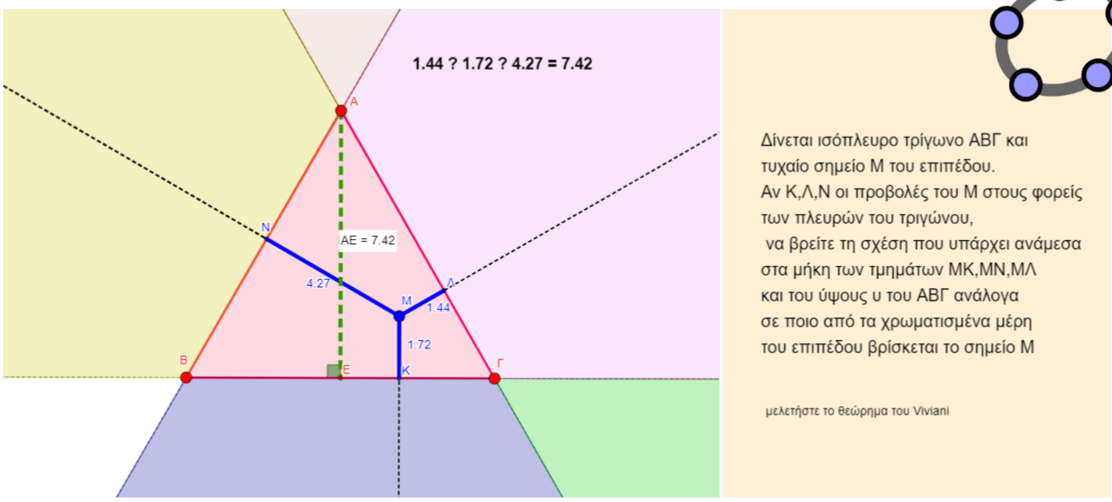
<u>Ως ανακεφαλαίωση</u> δίνεται :

Α. μία σύντομη παρουσίαση των όσων μάθαμε μέχρι τώρα – Τυπολόγιο,
Β. ένα ενδεικτικό φύλλο αυτοαξιολόγησης,
Γ. και η εργασία που δίνεται και υποστηρίζεται με δύο αρχεία GeoGebra είναι το γνωστό θεώρημα Viviani σε όλες τις εκδοχές του.
Η εργασία υποστηρίζεται με δύο αρχεία – εφαρμογές GeoGebra. Η πρώτη μεν με τρόπο δυναμικό καθοδηγεί τον μαθητή στην ανακάλυψη των συμπερασμάτων του θεωρήματος και στην περίπτωση όπου το σημείο είναι εσωτερικό της βάσης ΒΓ αλλά και στην περίπτωση όπου το σημείο είναι εξωτερικό της βάσης ΒΓ.



Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία

Η δεύτερη αφήνει τον μαθητή ελεύθερο να εικάσει σχέσεις και τελικά να προσπαθήσει να τις αποδείξει. Η εφαρμογή δίνει τη δυνατότητα δυναμικά να κινήσουμε σημείο και να μετρήσουμε αποστάσεις και αθροίσματα.



Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία

5ο Κεφάλαιο / Εφαρμογές παραλληλογράμμων.

5.1 Θεωρήματα στο τυχαίο τρίγωνο

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ

- Τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου.

ΠΜΑ

Γ.Ε.10.19. Αποδεικνύουν ιδιότητες που αφορούν το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο συνδέει μέσα πλευρών τριγώνου.

Διδακτική διαδικασία

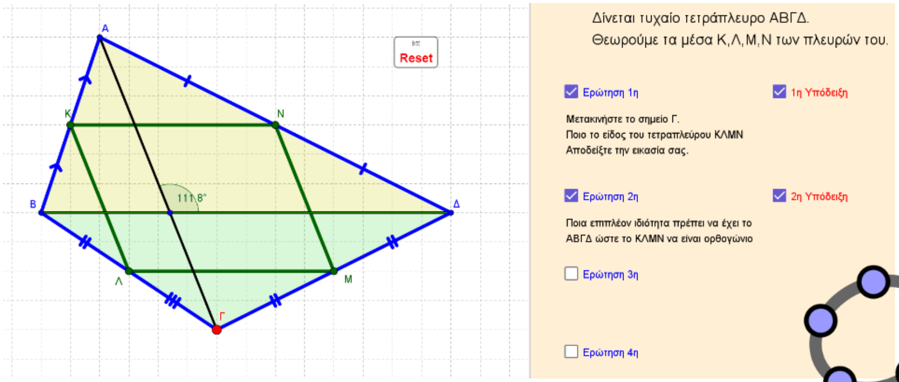
1. Με τη βοήθεια της δραστηριότητας οι μαθητές καταλήγουν στην ιδιότητα που έχει το τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου . Η λογικά προσδοκώμενη εικασία από μέρους των μαθητών είναι η ύπαρξη παραλληλογράμμων. Οπότε από το γεγονός ότι οι απέναντι πλευρές ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες συμπεραίνουμε ότι όλες οι διαδρομές τελικά θα είναι ίσες.
(**ΠΜΑ-Γ.Ε -19**)

2. Ακολούθως αποδεικνύονται τα δύο βασικά θεωρήματα στο τυχαίο τρίγωνο και το θεώρημα του Θαλή στην απλή εκδοχή του. Οι αποδείξεις δίνονται με επαγωγικό – ανακαλυπτικό τρόπο, προτάσσοντας ερωτήματα οι απαντήσεις των οποίων μας οδηγούν στην απόδειξη.

3. Τα λυμένα παραδείγματα που ακολουθούν παρουσιάζονται αναλυτικά, ώστε να φανεί ο επαγωγικός τρόπος σκέψης που ακολουθούμε για την λύση των ασκήσεων της γεωμετρίας.

4. Ειδικά για την κλασική άσκηση « τα μέσα των πλευρών ενός τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου», δίνεται εφαρμογή GeoGebra όπου ο μαθητής μπορεί να απαντήσει – διερευνήσει πότε το σχηματιζόμενο παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο – ρόμβος – τετράγωνο.

Η εφαρμογή δίνει στον μαθητή τη δυνατότητα να κινήσει σημεία και να μετρήσει αποστάσεις και γωνίες. Με τις διαδικασίες αυτές θα διατυπώσει εικασίες και τελικά θα φθάσει στην απόδειξη.



Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία

5. Οι ασκήσεις που ακολουθούν είναι κλασικές, αλλά υπάρχουν και εκείνες που έχουν ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον όσο αναφορά τη θεματολογία τους. Με τον τρόπο αυτό παρακινούμε τους μαθητές μας να ασχοληθούν με θέματα ρεαλιστικά.

5.2 Θεωρήματα στο ορθογώνιο τρίγωνο

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ

- Σχέση μεταξύ υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου και διαμέσου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.
- Σχέση υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου και καθέτου πλευράς απέναντι από γωνία 30^0.

ΠΜΑ

Γ.Ε.10.20. Προσδιορίζουν και αποδεικνύουν τις σχέσεις που συνδέουν την υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου αφενός με τη διάμεσο που αντιστοιχεί σε αυτήν και αφετέρου με την κάθετη πλευρά που είναι απέναντι από γωνία 30 μοιρών. Διαπιστώνουν ότι οι ιδιότητες αυτές χαρακτηρίζουν τα ορθογώνια τρίγωνα

Διδακτική διαδικασία

1. Με την βοήθεια της δραστηριότητας «Σιδερένιες και ξύλινες κατασκευές» οι μαθητές ανακαλύπτουν τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην υποτείνουσα και την διάμεσο που αντιστοιχεί σε αυτήν, αλλά και τις σχέσεις που υπάρχουν σε ορθογώνιο τρίγωνο με μία γωνία 30^o. **(ΠΜΑ.-Γ.Ε-20)**

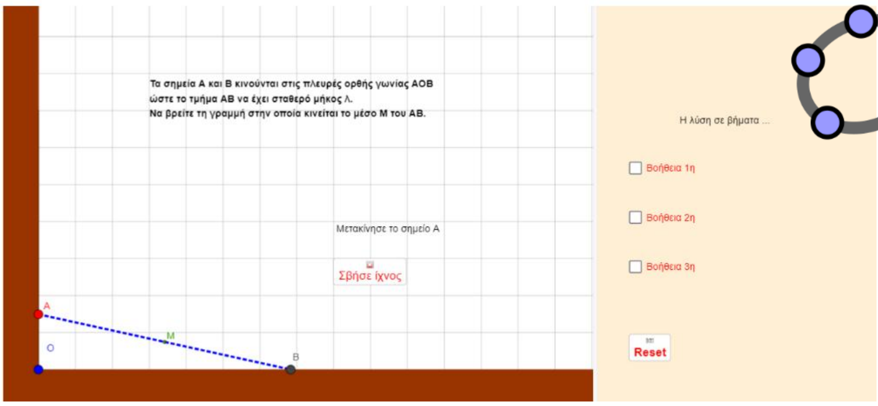
2. Δίνονται οι αποδείξεις των παραπάνω προτάσεων. Διατυπώνονται και αποδεικνύονται οι αντίστροφες προτάσεις.

3. Στα λυμένα παραδείγματα ο τρόπος γραφής αποκαλύπτει τον επαγωγικό τρόπο εργασίας που ακολουθούμε για την λύση μιας άσκησης Γεωμετρίας. Ο στόχος μας είναι να παρουσιάσουμε υποδειγματικά τις λογικές ακολουθίες που συγκροτούν την λύση. Έτσι ώστε ο μαθητής στην αρχή να μιμηθεί αλλά μετά να ανακαλύψει και τους δικούς του τρόπους – μεθόδους επίλυσης.

4. Οι ασκήσεις που ακολουθούν είναι διαβαθμισμένης δυσκολίας. Από απλές εφαρμογές μέχρι και ασκήσεις που απαιτούν την ανάπτυξη συνδυαστικών δεξιοτήτων από μέρους των μαθητών αφού εξετάζουν και θέματα προηγούμενων παραγράφων.

5. Με τη βοήθεια εφαρμογής GeoGebra οι μαθητές καλούνται να ασχοληθούν με το κλασικό γεωμετρικό τόπο του μέσου τμήματος που «γλιστρά» κατά μήκος του οριζόντιου επιπέδου.

Η κίνηση που έχει η δυναμική γεωμετρία μέσω εφαρμογών GeoGebra δίνει στον μαθητή την δυνατότητα να διατυπώσει εικασίες. Συγχρόνως η προσεγμένη διατύπωση ερωτημάτων και υποδείξεων καθοδηγεί τον μαθητή στην επίλυση του προβλήματος.



Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία

5.3 Χαρακτηριστικά κέντρα και κύκλοι του τριγώνου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ

- Σημείο τομής μεσοκαθέτων τριγώνου.
- Σημείο τομής διχοτόμων τριγώνου.
- Σημείο τομής υψών τριγώνου.
- Σημείο τομής διαμέσων τριγώνου.
- Κύκλοι τριγώνου.
- Μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων με αξιοποίηση των κέντρων τριγώνου.

Π.Μ.Α

Γ.Ε.10.21. Αποδεικνύουν ότι οι μεσοκάθετοι των πλευρών ενός τριγώνου και οι διχοτόμοι των γωνιών του συντρέχουν αντιστοίχως σε σημεία που αποτελούν κέντρα χαρακτηριστικών κύκλων του.

Γ.Ε.10.22. Διαπιστώνουν ότι τα ύψη του και οι διάμεσοί ενός τριγώνου συντρέχουν αντιστοίχως.

Γ.Ε.10.23. Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα αξιοποιώντας τα κέντρα τριγώνου.

τριγώνου συντρέχουν αντιστοίχως.

Διδακτική διαδικασία

1. Με τη βοήθεια οδηγιών οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν την πρώτη τους εφαρμογή GeoGebra με την οποία θα καταλήξουν στο γεγονός ότι οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

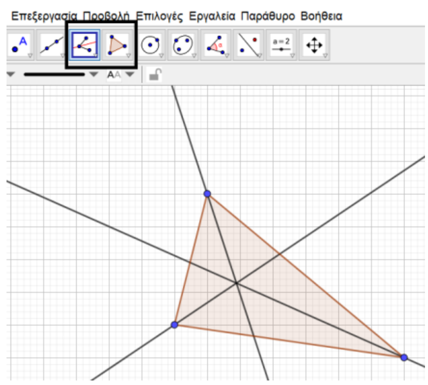
Με το εργαλείο :

«πολύγωνο» κατασκευάστε ένα τρίγωνο — Πολύγωνο

.

«διχοτόμος γωνίας» κατασκευάστε τις τρεις διχοτόμους του τριγώνου. — Διχοτόμος Γωνίας

Μετακινήστε μία οποιαδήποτε κορυφή του τριγώνου.
Τι παρατηρείτε σε σχέση με τις διχοτόμους του τριγώνου;



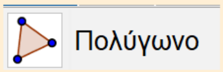
Η διαπίστωση ότι οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο έρχεται αβίαστα.

2. Ακολούθως δίνεται η απόδειξη και ο ορισμός του έγκεντρου και του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο.

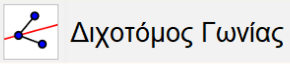
3. Οι μαθητές καλούνται να φτιάξουν σε περιβάλλον GeoGebra εφαρμογή όπου ο σκοπός είναι η κατασκευή του εγγεγραμμένου κύκλου.

Με το εργαλείο

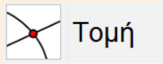
«πολύγωνο» κατασκευάστε ένα τρίγωνο.



«διχοτόμος γωνίας» κατασκευάστε τις τρεις διχοτόμους του τριγώνου.



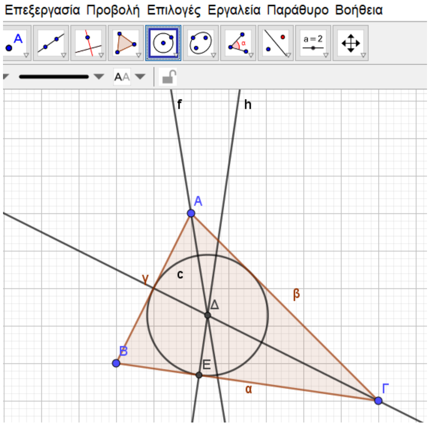
«τομή» βρείτε το έγκεντρο του τριγώνου.



Κατασκευάστε τον εγγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου.

Μετακινήστε μία οποιαδήποτε κορυφή.

Ελέγξτε την κατασκευή σας.



Είναι συνηθισμένο οι μαθητές να αρκούνται στο να σχεδιάσουν και όχι να κατασκευάσουν τον εγγεγραμμένο κύκλο. Οπότε με μία μικρή μετακίνηση μιας κορυφής του τριγώνου η όλη κατασκευή να καταρρέει.
Είναι ευκαιρία για τον διδάσκοντα να συζητήσει με τους μαθητές του τη διαφορά ανάμεσα στο σχεδιάζω-ζωγραφίζω και το κατασκευάζω.
Για την σωστή κατασκευή θα πρέπει να σημειωθεί το σημείο τομής δύο τουλάχιστον διχοτόμων – έγκεντρο.

Μετά για να κατασκευασθεί σωστά ο εγγεγραμμένος κύκλος θα πρέπει να φέρουμε από το έκκεντρο κάθετο σε μία πλευρά του, να σημειώσουμε το σημείο τομής της καθέτου με την πλευρά και τέλος να ορίσουμε την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου ως την απόσταση του έγκεντρου από το σημείο τομής.

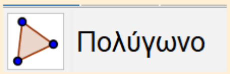
Ο εγγεγραμμένος κύκλος κατασκευάζεται επιλέγοντας το εργαλείο «κύκλος με κέντρο που διέρχεται από ένα σημείο».

Μετά την κατασκευή είναι σημαντικό μετακινώντας μία οποιαδήποτε κορυφή του τριγώνου να φανεί η «στέρεα» κατασκευή.

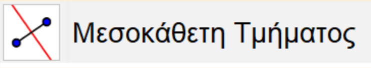
Για βοήθεια των παραπάνω μπορείτε να παραπέμψετε τους μαθητές σας να παρακολουθήσουν το παρακάτω video όπου ο επ. σχολικός σύμβουλος Ν. Λέσβου Δημήτριος Ζαχαριάδης παρουσιάζει την κατασκευή [(Link)]() (εξωτερικός σύνδεσμος).

4. Με την αντίστοιχη σειρά όπως στις οδηγίες 1 και 2 οι μαθητές θα καταλήξουν στο ότι οι μεσοκάθετοι των πλευρών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο και στην κατασκευή του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.
Πρώτα ασχολούνται με τη δημιουργία εφαρμογής , όπου διαπιστώνουν ότι οι μεσοκάθετοι των πλευρών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Με το εργαλείο

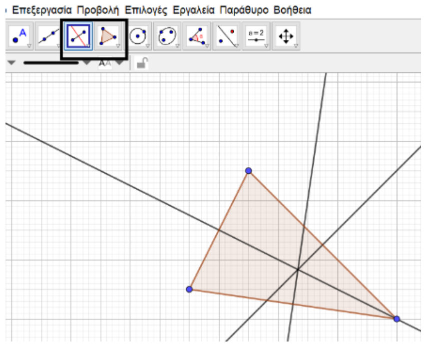


«πολύγωνο» κατασκευάστε τρίγωνο.



«μεσοκάθετος» κατασκευάστε τις μεσοκαθέτους των πλευρών του τριγώνου.

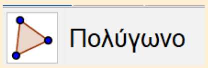
Μετακινήστε οποιαδήποτε κορυφή του τριγώνου.
Τι παρατηρείτε;



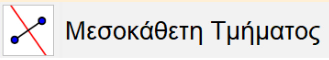
Η κατασκευή των τριών μεσοκαθέτων σε ένα τρίγωνο δεν παρουσιάζει ιδιαίτερες δυσκολίες. Χρησιμοποιούμε το εργαλείο «μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος».

Μετά ασχολούνται με τη δημιουργία εφραμογής για την κατασκευή τουτου περιγεγραμμένου κύκλου.

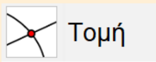
Με το εργαλείο



«πολύγωνο» κατασκευάστε τρίγωνο.

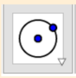


«μεσοκάθετος» κατασκευάστε τις τρεις μεσοκαθέτους του τριγώνου.



«τομή» βρείτε το περίκεντρο.

«κύκλος με κέντρο που διέρχεται από ένα σημείο» κατασκευάστε τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου.



Κινήστε οποιαδήποτε κορυφή του τριγώνου.

Από τρία σημεία διέρχεται πάντα ένας κύκλος;
Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

Καλό είναι να προτρέπουμε τους μαθητές να ελέγχουν την κατασκευή τους μετακινώντας μια οποιαδήποτε κορυφή του τριγώνου τους. Κίνηση με την οποία φαίνεται πόσο «στέρεα» είναι η όλη κατασκευή.

Η ερώτηση «από τρία σημεία διέρχεται πάντα ένας κύκλος;» μπορεί να οδηγήσει σε ενδιαφέρουσες απαντήσεις – καταστάσεις. **(ΠΜΑ-Γ.Ε-21)**

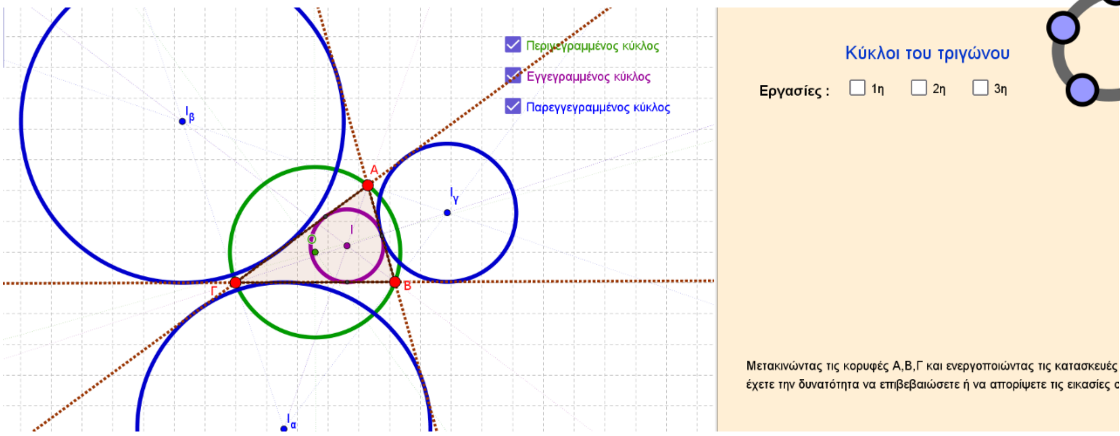
5. Ακολουθεί δραστηριότητα κατανόησης με κατασκευή εφαρμογής GeoGebra όπου οι μαθητές θα κατασκευάσουν τρίγωνο και τους εγγεγραμμένο και περιγεγραμμένο κύκλο και καλούνται να απαντήσουν σε μία σειρά από ερωτήσεις. Στην συνέχεια ακολουθούν ερωτήσεις κατανόησης.
Η κατασκευή συνδυάζει τα όσα έχουμε αναφέρει προηγούμενα. Ο σκοπός είναι οι μαθητές να διατυπώσουν εικασίες στις περιπτώσεις του ισοσκελούς και ισόπλευρου τριγώνου.

Κατασκευάστε ένα τρίγωνο ΑΒΓ.
Κατασκευάστε τις διχοτόμους και τις μεσοκαθέτους.
Βρείτε το περίκεντρο Ο του τριγώνου και
κατασκευάστε τον περιγεγραμμένο του τριγώνου κύκλο.
Βρείτε το έγκεντρο Ι του τριγώνου και
κατασκευάστε τον εγγεγραμμένο του τριγώνου κύκλο.

Μετακινήστε μία οποιαδήποτε κορυφή του τριγώνου ώστε :

1.Το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι αμβλυγώνιο τι παρατηρείτε
σχετικά με το έγκεντρο και το περίκεντρο
2.Τα σημεία Ο , Ι και Α να είναι στην ίδια ευθεία (συνευθειακά),
τι είδους τρίγωνο είναι το ΑΒΓ;
Αποδείξτε την εικασία σας.
3.Το έγκεντρο και το περίκεντρο να συμπέσουν,
τι είδους τρίγωνο είναι το ΑΒΓ.
Αποδείξτε την εικασία σας.

6. Η εφαρμογή GeoGebra που ακολουθεί παρουσιάζει στους μαθητές τους εγγεγραμμένους και περιγεγραμμένους κύκλους που ήδη γνωρίζουν αλλά και τους παρεγγεγραμμένους κύκλους (καλό είναι ο καθηγητής να εξηγήσει στους μαθητές ότι ο περεγγεγραμμένος κύκλος έχει κέντρο το σημείο τομής των εξωτερικών διχοτόμων δύο γωνιών τριγώνου και εφάπτεται εξωτερικά των τριών πλευρών του τριγώνου). Η προτροπή να μετακινήσουν κάποια κορυφή του τριγώνου μπορεί να οδηγήσει τον μαθητή στην διατύπωση εικασιών- ερωτήσεων (π.χ. τι συμβαίνει στην περίπτωση ενός ισοπλεύρου τριγώνου;).



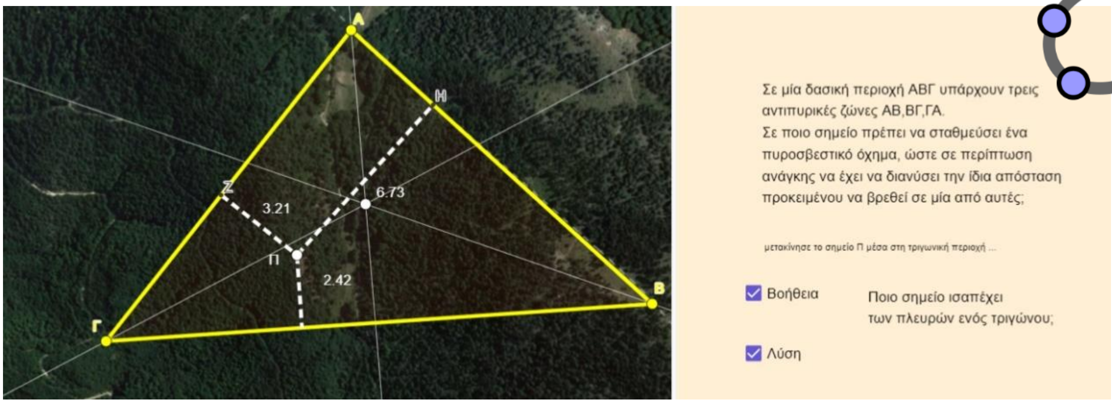
Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία

7. Με τη βοήθεια δραστηριότητας (ο φωτισμός του πάρκου) οι μαθητές εμπλέκονται στην μοντελοποίηση πραγματικών καταστάσεων αξιοποιώντας τις κατεκτημένες γνώσεις (**ΠΜΑ-Γ.Ε-23**). Το σημαντικό είναι ότι δεν υπάρχει μία λύση αλλά πολλές ανάλογα το προσδοκώμενο όφελος. Πρόκειται για διασκευή δραστηριότητας – θέματος του διαγωνισμού PIZA 2006.

8. Ακολουθούν ασκήσεις εξάσκησης και κατανόησης.

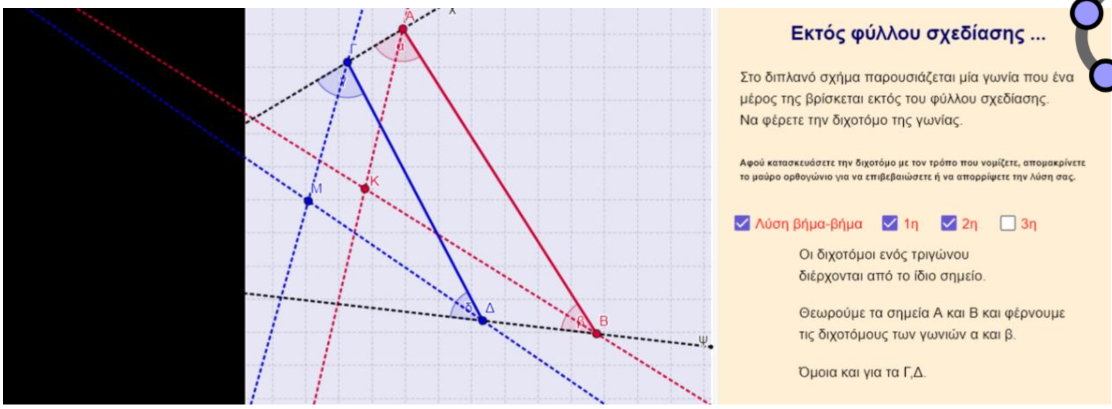
Σε ασκήσεις όπου εξετάζονται ρεαλιστικές καταστάσεις υπάρχουν και εφαρμογές GeoGebra όπου με τρόπο δυναμικό οι μαθητές μπορούν να διατυπώσουν εικασίες.

Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία



Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία

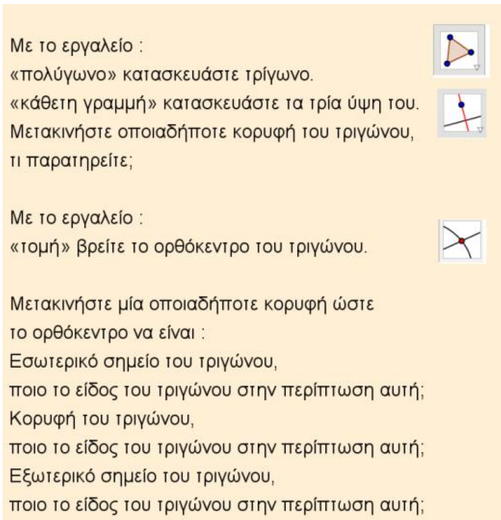
Η άσκηση όπου παρουσιάζεται μία γωνία με την κορυφή της εκτός φύλλου σχεδίασης αποτελεί κλασικό ανοικτό πρόβλημα που επιδέχεται πολλές λύσεις. Η εφαρμογή δίνει την δυνατότητα χρησιμοποιώντας τα εργαλεία του λογισμικού ο μαθητής και εικάσει αλλά και να επαληθεύσει τις υποψίες του, μετακινώντας απλώς το μαύρο πλαίσιο που καλύπτει την κορυφή της γωνίας.



Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία

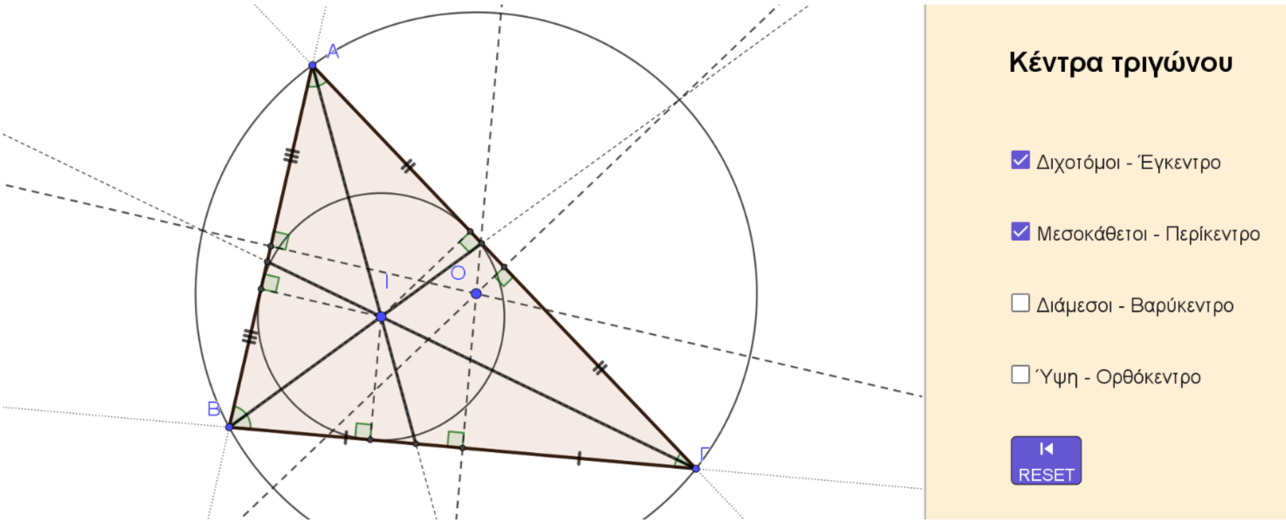
9. Με τη βοήθεια του νόμου της ισορροπίας του Αρχιμήδη προσεγγίζεται η ιδιότητα των διαμέσων ενός τριγώνου (διέρχονται από το ίδιο σημείο το οποίο απέχει από την κάθε κορυφή απόσταση ίση με τα 2/3 της αντίστοιχης διαμέσου), ακολουθεί η απόδειξη.

10. Με την βοήθεια εφαρμογής που θα γίνει από τους ίδιους τους μαθητές σε περιβάλλον GeoGebra θα καταλήξουν στο γεγονός ότι τα ύψη ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο. Θα διερευνήσουν πότε το ορθόκεντρο είναι εσωτερικό ή εξωτερικό σημείο του τριγώνου και τι ισχύει στην περίπτωση όπου το τρίγωνο είναι ορθογώνιο. Δίνεται η απόδειξη. **(ΠΜΑ-Γ.Ε-10.22)**

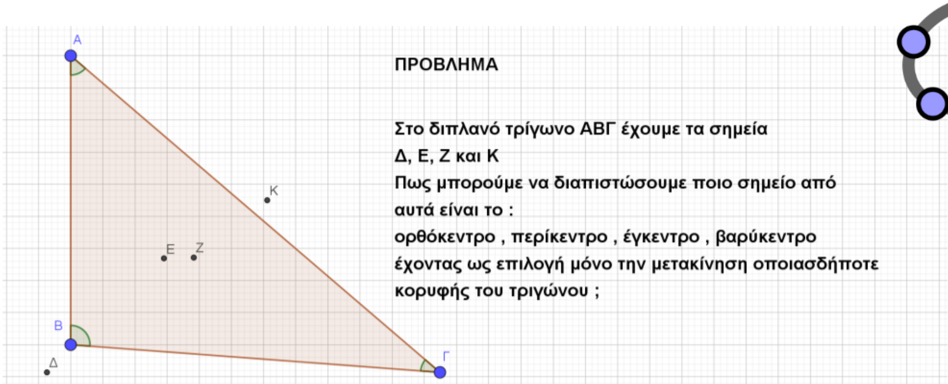


Η εφαρμογή δεν παρουσιάζει ιδιαίτερες δυσκολίες. Χρησιμοποιούμε τα εργαλεία «κατασκευή τριγώνου» , «κάθετη από σημείο προς ευθεία» , «σημείο τομής». Οι μαθητές καλούνται να μετακινήσουν μία οποιαδήποτε κορυφή, να διατυπώσουν εικασία. Μετακινώντας μία οποιαδήποτε κορυφή διατυπώνουμε την ερώτηση πότε το ορθόκεντρο είναι εσωτερικό ή εξωτερικό σημείο του τριγώνου και πότε κάποια κορυφή του. Καλό είναι μετά τα όποια συμπεράσματα οι μαθητές να κατασκευάσουν χρησιμοποιώντας γνώμονα στο τετράδιό τους τα τρία ύψη στις περιπτώσεις οξυγώνιου – ορθογώνιου και αμβλυγώνιου τριγώνου.

11. Συνοψίζοντας παρουσιάζουμε με τη βοήθεια εφαρμογής GeoGebra όλα τα κέντρα του τριγώνου που έχουμε γνωρίσει.



12. Ακολουθούν ερωτήσεις κατανόησης. Επίσης δίνεται μία εφαρμογή GeoGebra όπου οι μαθητές καλούνται να αναγνωρίσουν τα τέσσερα βασικά σημεία του τριγώνου (έγκεντρο – περίκεντρο – βαρύκεντρο και ορθόκεντρο) σε ένα ήδη σχεδιασμένο τρίγωνο έχοντας ως δυνατότητα μόνο να μπορούν να μετακινούν μία οποιαδήποτε κορυφή του τριγώνου.



Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία

13. Ακολουθούν λυμένα παραδείγματα, όπου στην λύση δίνεται αναλυτικά ο επαγωγικός τρόπος σκέψης για την επίλυση μιας άσκησης γεωμετρίας.

14. Ακολουθούν ασκήσεις που καλούνται να λύσουν οι μαθητές.

15. Ως εργασία οι μαθητές γνωρίζουν τα διαγράμματα Voronoi και καλούνται με τη βοήθεια του λογισμικού GeoGebra να εμπλακούν στην επίλυση προβλήματος.

5.4 Το τραπέζιο και οι ιδιότητές του.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ

- Τραπέζιο και ισοσκελές τραπέζιο.
- Η διάμεσος τραπεζίου και σχέση της με τις βάσεις.
- Ιδιότητες ισοσκελούς τραπεζίου.
- Κριτήρια για να είναι ένα τραπέζιο ισοσκελές.
- Μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων με χρήση των ιδιοτήτων των παραλληλογράμμων και τραπεζίων.

ΠΜΑ

Γ.Ε.10.24. Αναγνωρίζουν το τραπέζιο ως το τετράπλευρο με μόνο δύο πλευρές παράλληλες και το ισοσκελές τραπέζιο και αποδεικνύουν τις βασικές ιδιότητές τους.
Γ.Ε.10.25. Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων και τραπεζίων.

Διδακτική διαδικασία

1. Οι μαθητές αναγνωρίζουν το τραπέζιο με τη βοήθεια της προοπτικής. Συγχρόνως με τη δραστηριότητα «Γεωμετρικά σχήματα στο κέντρο του Παρισιού» οι μαθητές αναγνωρίζουν το τραπέζιο και αποδεικνύουν τις βασικές ιδιότητές του. Με τη δραστηριότητα αυτή καλύπτεται το τμήμα του **ΠΜΑ-Γ.Ε.10.24** που αφορά το τραπέζιο.

2. Ακολουθεί δραστηριότητα όπου οι μαθητές εφαρμόζουν όσα γνωρίζουν στην επίλυση ενός ρεαλιστικού μαθηματικού προβλήματος. **(ΠΜΑ-Γ.Ε.10-25).**

3. Με τη βοήθεια της επόμενης δραστηριότητας οι μαθητές αποδεικνύουν τις βασικές ιδιότητες του ισοσκελούς τραπεζίου και αποδεικνύουν τις σχέσεις που πρέπει να ισχύουν ώστε ένα τραπέζιο να είναι ισοσκελές. Με τη δραστηριότητα αυτή καλύπτεται το τμήμα του **ΠΜΑ-Γ.Ε.10.24** που αφορά το ισοσκελές τραπέζιο.

4. Ακολουθούν λυμένα παραδείγματα όπου τα θέματα προσεγγίζονται με αναλυτικό – επαγωγικό τρόπο σκέψης.

5. Μετά δίνονται ερωτήσεις κατανόησης και ασκήσεις προς λύση.

6. Η $19^{η}$ άσκηση είναι ο γρίφος του Gamow **(George Gamow** (1904 – 1968) Ρώσο – Αμερικάνος, θεωρητικός φυσικός και κοσμολόγος) και παρουσιάζεται στο γνωστό βιβλίο του «**one two three … infinity**». Ουσιαστικά είναι η προηγούμενη άσκηση παρουσιασμένη με τον μανδύα ενός ρεαλιστικού θέματος.

<u>Ως ανακεφαλαίωση</u> δίνεται:

Α. Μία σύντομη παρουσίαση των όσων μάθαμε μέχρι τώρα – Τυπολόγιο.

Β. Ένα ενδεικτικό φύλλο αυτοαξιολόγησης.

Γ. Ως ιδιαίτερη στιγμή της ιστορίας των μαθηματικών παρουσιάζεται στους μαθητές μία κατηγοριοποίηση των τετράπλευρων με τη βοήθεια διαγραμμάτων του Venn. Με τη βοήθεια λέξης κλειδί καλούνται οι μαθητές να ψάξουν στο διαδίκτυο άλλες κατηγοριοποιήσεις των τετράπλευρων και τα αποτελέσματά τους να τα παρουσιάσουν στους συμμαθητές τους.

6ο Κεφάλαιο / Στερεομετρία

<u>6.1 Σημεία, ευθείες και επίπεδα στον χώρο.</u>

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ
- Σχετικές θέσεις ευθειών.
- Σχετικές θέσεις επιπέδων.
- Σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων.

Π.Μ.Α
Γ.Χ.10.1. Σχεδιάζουν ευθείες και επίπεδα στο χώρο.
Γ.Χ.10.2. Διερευνούν τις σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων στο χώρο, καθώς και ευθείας και επιπέδου.

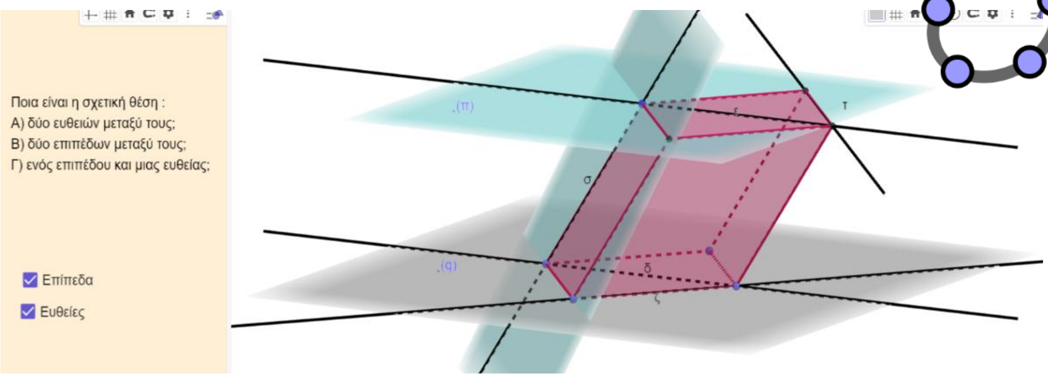
Διδακτική διαδικασία

1. Ξεκινάμε με δύο βασικές ερωτήσεις.

Α. <u>Πως ορίζεται ένα επίπεδο</u>;
Δίνεται παρουσιάση σε 3-Δ κατάσταση αλλά και σε 2-Δ (σε έναν πίνακα ανακοινώσεων) ώστε ο μαθητής να συνηθίσει να «βλέπει» στο χώρο να αντικείμενο, αλλά και να σχεδιάζει ευθείες και επίπεδα στο χώρο.

Β.
1. <u>Πως μπορεί να είναι σχεδιασμένα δύο επίπεδα το ένα σε σχέση με το άλλο στο χώρο</u>;
2. <u>Πως μπορεί να είναι σχεδιασμένη μία ευθεία σε σχέση με ένα επίπεδο;</u>
3. <u>Πως μπορούν να είναι σχεδιασμένες δύο ευθείες μεταξύ τους στο χώρο;</u>

Οι απαντήσεις έρχονται ως αποτέλεσμα διερεύνησης των μαθητών με την βοήθεια της εφαρμογής GeoGebra.

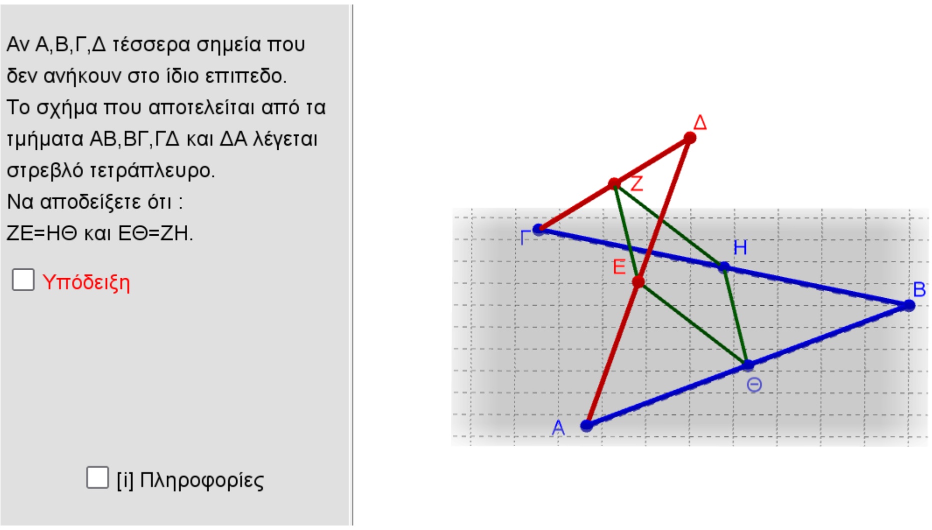


Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία

Με τα παραπάνω καλύπτονται τα **ΠΜΑ-Γ.Χ.-10.1 και 10.2.**

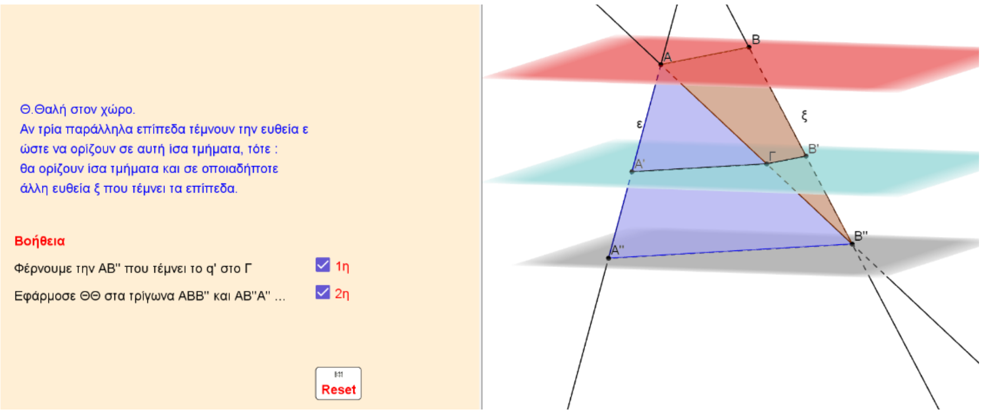
2. Η οπτικοκοποίηση και ο σχεδιασμός σε καταστάσεις 3Δ είναι και το αντικείμενο της 1ης ερώτησης κατανόησης όπου οι μαθητές απλώς πρέπει να εικάσουν και όχι να αποδείξουν. Ακολουθούν και άλλες δύο όπου σε περιβάλλον καθαρά γεωμετρικό η μία αλλά και μέσα από ένα έργο τέχνης η άλλη, οι μαθητές καλούνται να ανακαλύψουν τα όσα έχουν πιο πάνω ορισθεί.

3. Ακολουθούν ασκήσεις όπου υποστηρίζονται με εφαρμογές GeoGebra όπου ο διδάσκων μπορεί να τις χρησιμοποιήσει για την διαπραγμάτευση των ασκήσεων.



Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία

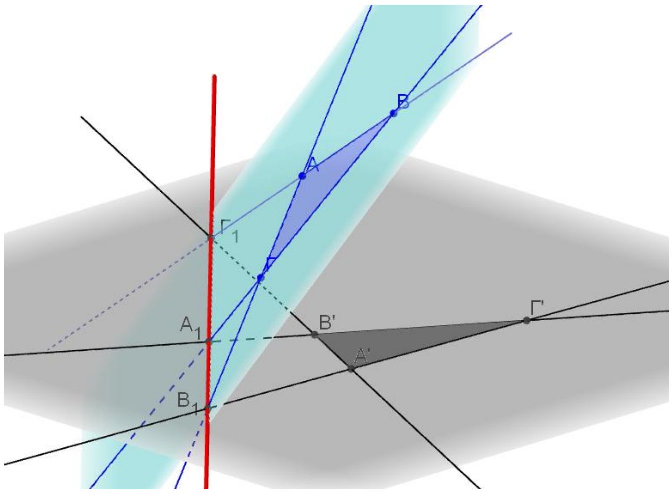
Σε όλες τις εφαρμογές μπορεί η όλη κατασκευή να κινηθεί με τέτοιο τρόπο ώστε να δοθεί στον μελετητή η αίσθηση του τρισδιάστατου.



Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία

Η επόμενη άσκηση είναι το κλασικό θέμα «σημεία του **Desargues**» όπου η λύση σε περιβάλλον 3Δ απαιτεί στοιχειώδεις γνώσεις, ότι σε δύο τεμνόμενα επίπεδα τα κοινά σημεία τους είναι τα σημεία μιας ευθείας. Η άσκηση υποστηρίζεται με εφαρμογή GeoGebra.

Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία



<u>6.2 Δίεδρες γωνίες και η μέτρησή τους.</u>

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ
- Δίεδρες γωνίες.
- Μέτρο δίεδρης γωνίας

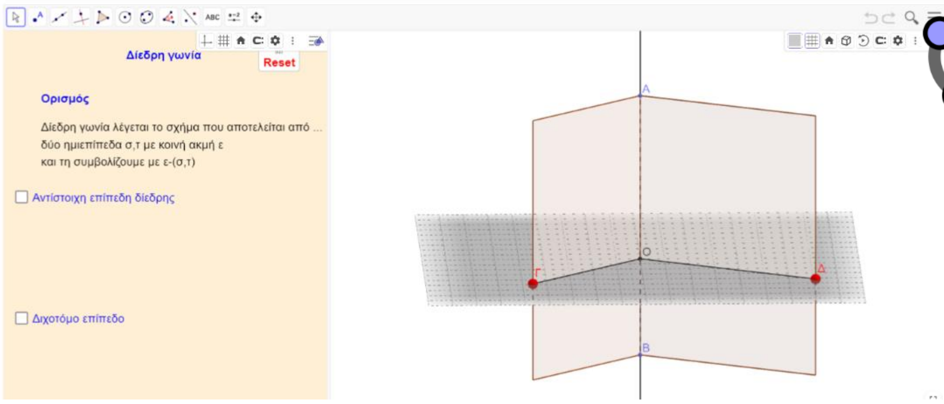
ΠΜΑ
Γ.Χ.10.3. Αναγνωρίζουν τις δίεδρες γωνίες.
Μ.Γ.10.1. Ορίζουν το μέτρο δίεδρης γωνίας.

Διδακτική διαδικασία

1. Καταρχήν παρουσιάζονται οι έννοιες: ευθεία κάθετη σε επίπεδο και προβολή σημείου σε επίπεδο.

2. Γίνεται αναφορά στο θεώρημα των τριών καθέτων. Το σημαντικό είναι οι μαθητές να είναι σε θέση να αναγνωρίζουν το θεώρημα, το σκοπό αυτό τον υπηρετεί οι ερωτήσεις κατανόησης που υπάρχουν.

3. Μέσω δραστηριότητας (ανοιγμένο βιβλίο) οι μαθητές οδηγούνται στο να αναγνωρίσουν και να περιγράψουν μία δίεδρη γωνία και να προσδιορίσουν το μέτρο της. (**ΠΜΑ.-Γ.Χ.-10.3 και Μ-Γ-10.1**)
Οι έννοιες παρουσιάζονται και με το κατάλληλο αρχείο GeoGebra.



Περιγραφή Εφαρμογής Πληροφοριακά Στοιχεία

4. Στις ασκήσεις επιδιώκεται η αναγνώριση των δίεδρων και η μέτρηση της γωνίας σχηματιζόμενων δίεδρων γωνιών με την βοήθεια γνώσεων που έχουν ήδη αποκτηθεί από θεωρήματα της επιπεδομετρίας. Αναγνωρίζουν δηλαδή οι μαθητές θεωρήματα επιπεδομετρίας σε 3-Δ καταστάσεις.

Ως ανακεφαλαίωση:

1. παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες που συναντήσαμε (Τυπολόγιο),
2. φύλλο αυτοαξιολόγησης.

Οδηγίες για την εκπόνηση δημιουργικών εργασιών στο πλαίσιο του μαθήματος

Εργασίες Μαθητών

Στο βιβλίο στο τέλος κάθε ενότητας προτείνονται κάποιες εργασίες. Αυτές μπορούν να γίνουν είτε ατομικά είτε ομαδικά. Το παραδοτέο από μέρους των μαθητών θα πρέπει να διακρίνεται από σαφήνεια , ορθότητα, και επιμέλεια. Συγχρόνως μπορεί να οργανωθεί μία ημερίδα ανοικτή στην υπόλοιπη σχολική κοινότητα όπου θα παρουσιαστούν οι εργασίες αυτές από τους ίδιους τους μαθητές. Κρίνεται σκόπιμο η βαθμολόγησή των εργασιών ως συμπληρωματική βαθμολογία αλλά και ως επιβράβευση της όλης προσπάθειας.

Ας δούμε τις εργασίες αυτές.

1η εργασία : Το πείραμα του Ερατοσθένη.

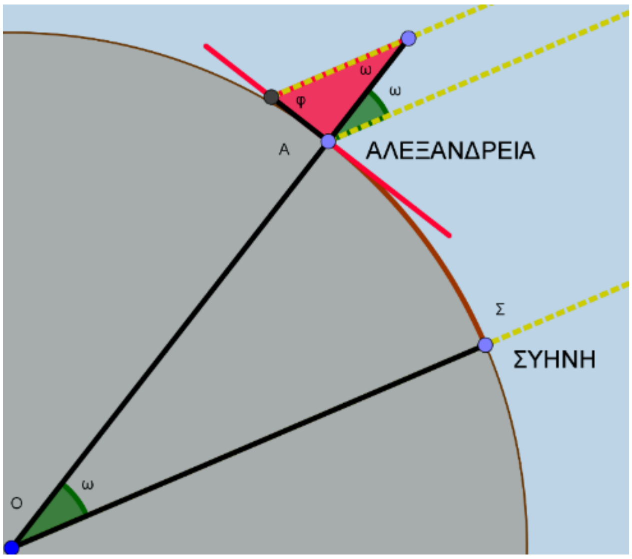
Δίνεται το κείμενο:

Τα μαθηματικά υπάρχουν για να λύνουν προβλήματα . Εφαρμόζονται εκεί που δεν το περιμένεις. Χαρακτηριστικό παράδειγμα εφαρμοσμένων μαθηματικών είναι ο τρόπος που ο Έλληνας μαθηματικός Ερατοσθένης (276 π.Χ. – 194 π.Χ.) υπολόγισε το μήκος της γης!

Ο Ερατοσθένης γνώριζε ότι η πόλις Συήνη βρίσκεται νότια της Αλεξάνδρειας σε μία απόσταση σχεδόν 800 χιλιομέτρων. Γνώριζε επίσης ότι το μεσημέρι του θερινού ηλιοστασίου ο ήλιος βρίσκεται κατακόρυφα πάνω από την πόλη, πράγμα που επιβεβαιωνόταν από το γεγονός ότι μόνο τότε ο ήλιος φώτιζε μέχρι το πάτο το μεγάλο πηγάδι της πόλης που είχαν για την ύδρευσή τους οι κάτοικοι.
Με τη βοήθεια λοιπόν μιας μέτρησης και μιας παρατήρησης, κατόρθωσε κάτι εκπληκτικό!
Να μετρήσει πόσο μεγάλη είναι η περιφέρεια της γης, εφαρμόζοντας προτάσεις Γεωμετρίας !
Κατά αρχήν θεώρησε ότι οι ακτίνες του ήλιου πέφτουν σε κάθε σημείο στη γη παράλληλα, λόγω της μεγάλης απόστασης γης-ηλίου.

Μετά με τη βοήθεια ενός γνώμονα στην Αλεξάνδρεια υπολόγισε τη γωνία που σχηματίζουν οι κατακόρυφοι στις δύο πόλεις.

Παρατηρείστε πως εφαρμόζεται ότι δύο εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες είναι ίσες.
Την γωνία την υπολόγισε ίση με 7,2° ή ίση με το $\frac{1}{50}$ του κύκλου.



Δείτε το video : https://www.youtube.com/watch?v=YuGk1-ivXbA

Ερωτήσεις:

Α) Βρείτε πόσο είναι η περιφέρεια της γης σύμφωνα με τις μετρήσεις του Ερατοσθένη.

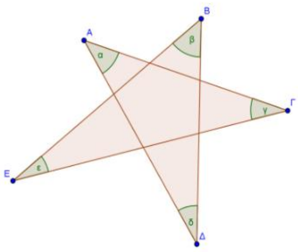
Β) Ψάξτε στο διαδίκτυο για το πείραμα του Ερατοσθένη και τις δυνατότητες που υπάρχουν να γίνει από σας τους ίδιους.

2η εργασία : Άθροισμα γωνιών αστεριού.

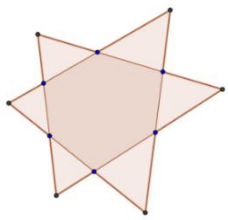
Η εργασία μπορεί να γίνει και μέσα στη τάξη με κατάλληλο φύλλο εργασίας

Προτρέπουμε τους μαθητές ..

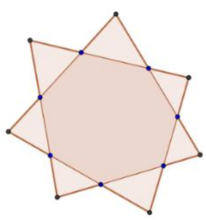
Να σχεδιάσουν στη τύχη μονοκονδυλιά ένα αστέρι, κάτι σαν αυτό του διπλανού σχήματος.
Και να υπολογίσουν το άθροισμα $\hat{\alpha}+\hat{\beta}+\hat{\gamma}+\hat{\delta}+\hat{\varepsilon}$ των γωνιών του αστεριού που θα φτιάξουν.



Να αναρωτηθούν τι συμβαίνει στην περίπτωση που το αστέρι είναι εξάκτινο;



Τι συμβαίνει σε ένα αστέρι με επτά ακτίνες, σαν το διπλανό.



Να συμπληρώσουν τον διπλανό πίνακα ώστε να ανακαλύψουν το κρυμμένο μοτίβο. Οπότε θα είναι μετά σε θέση να εικάσουν το τι συμβαίνει αν οι ακτίνες είναι 100 ή 1000 ή γενικά ν όπου ν ένας οποιασδήποτε φυσικός αριθμός.

Αριθμός ακτίνων αστεριού	Άθροισμα γωνιών
5	
6	
7	
8	
9	

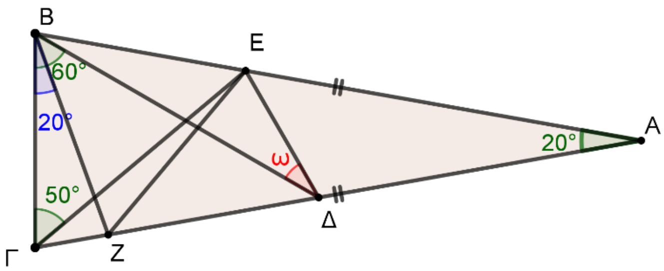
Τέλος θα υπάρχει η προτροπή της απόδειξης της όποιας εικασίας.

3η εργασία : «Το τρίγωνο 80-80-20»

Δίνεται το κείμενο:

Ο Edward Mann Langley (1851–1933) ήταν Βρετανός μαθηματικός, συγγραφέας μαθηματικών εγχειριδίων και ιδρυτής του **Mathematical Gazette** (περιοδικό της Βρετανικής Μαθηματικής Εταιρείας). Είναι δημιουργός της **πιο δύσκολης άσκησης της στοιχειώδους Γεωμετρίας** η οποία αναφέρεται στην βιβλιογραφία ως «**το τρίγωνο 80-80-20**».
Ας δούμε τι λέει η άσκηση αυτή :

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\mathrm{A} = 20^\circ$. Θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε στις ίσες πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα ώστε $\mathrm{\Gamma B \Delta} = 60^\circ$ και $\mathrm{B\hat{\Gamma}E} = 50^\circ$. Να υπολογίσετε την γωνία $\mathrm{E\Delta B} = \omega$ σε μοίρες.



<u>Υπόδειξη</u> : Θεωρείστε σημείο Ζ της ΑΓ ώστε $\mathrm{\Gamma B Z} = 20^\circ$ και αποδείξτε ότι :

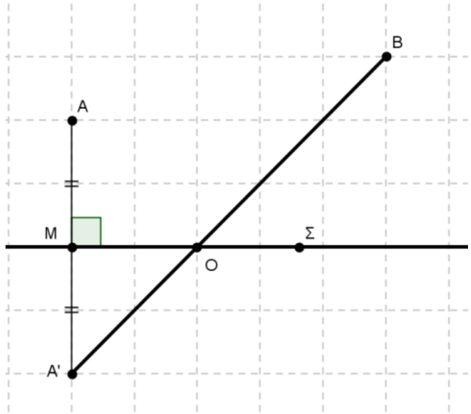
- Τα τρίγωνα ΒΓΖ , ΒΖΔ είναι ισοσκελή
- Το τρίγωνο ΒΖΕ είναι ισόπλευρο
- Το τρίγωνο ΕΖΔ είναι ισοσκελές και τέλος υπολογίστε την γωνία ω.

Οι μαθητές καλούνται να :

Ασχοληθούν μαζί της ως **εργασία για το σπίτι** και **να ψάξουν** στο διαδίκτυο για άλλες λύσεις της άσκησης «το τρίγωνο 80-80-20».

4^{η} εργασία : Σημείο του Ήρωνα

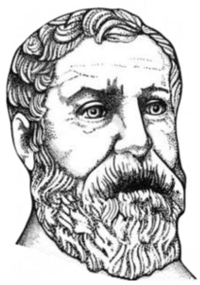
Οι μαθητές λύνουν την παρακάτω άσκηση …



Στο διπλανό σχήμα θεωρούμε τα σημεία Α,Β προς το ίδιο μέρος μιας ευθείας. Από το Α φέρνουμε κάθετο προς την ευθεία και θεωρούμε σημείο Α’ ώστε ΑΜ=Α’Μ,(Α’ **συμμετρικό** του Α **ως προς την ευθεία**). Φέρνουμε την Α’Β που τέμνει την ευθεία στο Ο
Να αποδείξετε ότι :
Α) ΟΑ=ΟΑ’
Β) Αν Σ τυχαίο σημείο της ευθείας τότε το τρίγωνο ΑΣΑ’ είναι ισοσκελές.
Γ) Ισχύει ότι ΣΑ+ΣΒ>ΟΑ+ΟΒ

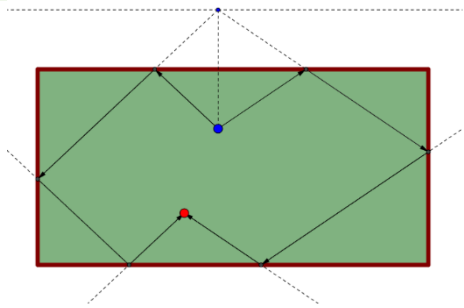
Με βάση το κείμενο:

Στιγμές από την ιστορία των μαθηματικών



Ήρων ο Αλεξανδρινός (10μ.Χ – 75μ.Χ) , ήταν μηχανικός, μαθηματικός και εφευρέτης. Διευθυντής της Τεχνικής σχολής της Αλεξάνδρειας, (το πολυτεχνείο της εποχής). Γνωστός για μηχανισμούς που κατασκεύαζε και λειτουργούσαν (αυτόματα) με τη δύναμη του ατμού. Σαυτόν αποδίδεται το λεγόμενο **Σημείο του Ήρωνα**. Πρόκειται για το εξής πρόβλημα.
Αν (ε) μία ευθεία και Α,Β δύο σημεία προς το ίδιο μέρος της, να βρεθεί σημείο Μ της (ε) ώστε το άθροισμα ΜΑ+ΜΒ να γίνεται ελάχιστο.
Πρόκειται για το πρώτο πρόβλημα μεγίστου ελαχίστου που διατυπώθηκε. Συγχρόνως στο έργο του κατοπτρικά καταλήγει στην βεβαιότητα ότι το φως ανακλάται ακολουθώντας την ελάχιστη διαδρομή. Δηλαδή η διαδρομή που ακολουθεί μία φωτεινή ακτίνα από την πηγή Α μέχρι το μάτι μας αφού πρώτα ανακλαστεί στο καθρέπτη θα γίνει με βάση το προηγούμενο πρόβλημα.

Τον Ήρωνα τον συναντάμε παίζοντας μπιλιάρδο. Η μπίλια ανακλάται στα τοιχώματα του μπιλιάρδου ακολουθώντας τις επιταγές του Ήρωνα!

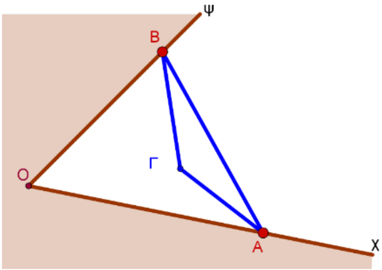


Οι μαθητές καλούνται:

Α) να ψάξουν στο διαδίκτυο πληροφορίες για τον Ήρωνα τον Αλεξανδρινό.
Β) να συσχετίσουν με την Φυσική τα όσα αναφέρονται στο παραπάνω κείμενο
Γ) να ασχοληθούν με τα προβλήματα

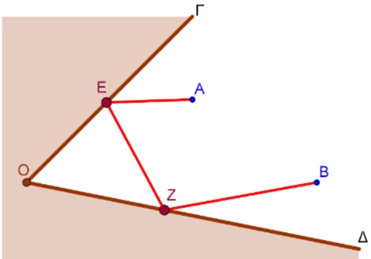
Ως βοήθεια έχουν τις εφαρμογές GeoGebra που δίνουν ιδέες.

Πρόβλημα 1ο
Δίνεται σημείο Γ εσωτερικό γωνίας χΟψ. Να βρεθούν σημεία Α,Β των Οχ,Οψ αντίστοιχα, ώστε η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ να είναι η ελάχιστη δυνατή.



Πρόβλημα 2ο

Δύο τοίχοι ΟΓ και ΟΔ σχηματίζουν ο ένας με τον άλλον τυχαία γωνία. Δύο άτομα Α και Β είναι στραμμένα προς αυτούς. Σε ποια σημεία των δύο τοίχων πρέπει να τοποθετηθούν δύο κάτοπτρα Ε και Ζ ώστε να μπορούν τα δύο άτομα να βλέπονται;
Έχοντας υπόψιν μας ότι το φως θα κινηθεί ακολουθώντας την συντομότερη διαδρομή, το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση της θέσης των Ε,Ζ ώστε το άθροισμα ΑΕ+ΕΖ+ΖΒ να είναι το ελάχιστο δυνατό.



Ως βοήθεια έχουν τις εφαρμογές GeoGebra που δίνουν ιδέες.

5η εργασία : Τριχοτόμηση γωνίας

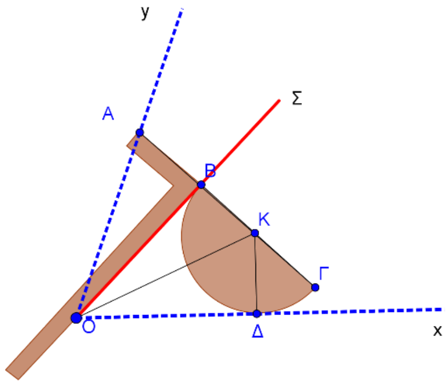
Με τη βοήθεια των παρακάτω κειμένων.

Ένα από τα προβλήματα που αντιμετώπισαν οι αρχαίοι Έλληνες γεωμέτρες ήταν να βρουν τρόπο να τριχοτομούν μία οποιαδήποτε γωνία με βάση τους περιορισμούς της Ευκλείδειας επιταγής ότι μία κατασκευή πρέπει να γίνεται χρησιμοποιώντας μόνο διαβήτη και κανόνα. Όλες οι προσπάθειες έπεσαν στο κενό γιατί όπως αποδείχθηκε αργότερα μία τέτοια κατασκευή είναι αδύνατη.
Όμως τα μαθηματικά προχωρούν όταν συναντάμε προβλήματα που δεν μπορούν να λυθούν. Είναι η ώρα που νέα μαθηματικά ανακαλύπτονται και νέες γεωμετρικές μορφές παράγονται. Έτσι μαθηματικοί όπως **ο Ιππίας ο Ηλείος** (5ος αι. Π.Χ.) , **Αρχιμήδης ο Συρακούσιος** (287-212 π.Χ.), **Νικομήδης** (2 αι. Π.Χ.), **Πάππος ο Αλεξανδρινός** (3 αι. π.Χ.), αλλά και σύγχρονοι γεωμέτρες όπως οι **Pascal** (1623-1662), **Ceva** (1699), **Mac Laurin** (1742) βρήκαν τρόπους επίλυσης του προβλήματος. Αποτέλεσμα της προσπάθειας αυτής ήταν η δημιουργία νέων καμπυλών όπως η **τετραγωνίζουσα** του Ιππία και η **σπείρα** του Αρχιμήδη.

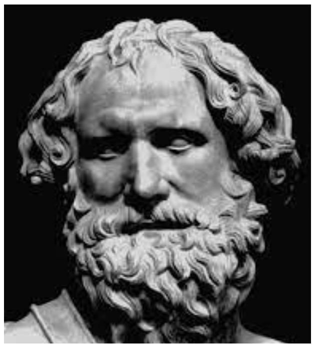
Συγχρόνως κατασκευάστηκαν νέα Γεωμετρικά όργανα με τα οποία με τρόπο μηχανικό έλυναν το πρόβλημα. Ένα από αυτά τα όργανα είναι αυτό που παρουσιάζεται στην παρακάτω εικόνα. Το όργανο αυτό αποτελείται από έναν συνδυασμό γνώμονα και μοιρογνωμονίου.

Η κατασκευή του γίνεται ώστε ΒΓ=2ΑΒ δηλαδή η ακτίνα του ημικυκλίου να είναι ίση με την μια πλευρά της ορθής.

Όπως θα παρατηρείτε το όργανο τοποθετείται έτσι ώστε το ημικύκλιο να εφάπτεται της πλευράς Οx και το άκρο του Α να είναι πάνω στην Oy της γωνίας xOy. Δικαιολογείστε γιατί επιτυγχάνεται με τον τρόπο αυτό η τριχοτόμηση της δεδομένης γωνίας.



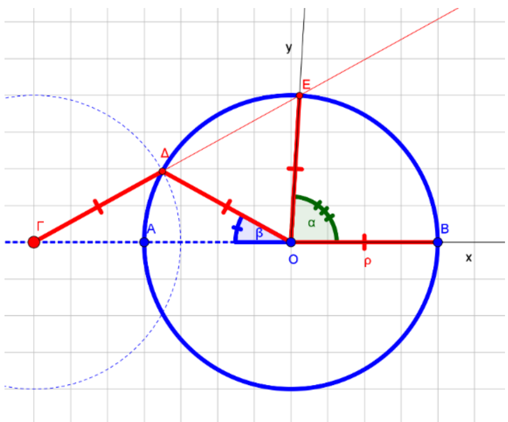
Ο μεγαλύτερος μαθηματικός της Αρχαιότητας ο **Αρχιμήδης** από τις Συρακούσες βρήκε τρόπο να τριχοτομεί οποιαδήποτε γωνία εισάγοντας στην γεωμετρία την κίνηση … ή όπως έλεγε τότε με τη μέθοδο της «**νεύσης**».


Αρχιμήδης ο Συρακούσιος (287 π.Χ. 212 π.Χ.)

Ας παρακολουθήσουμε την σκέψη του.

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να τριχοτομήσουμε την γωνία $xOy = \alpha$

Τότε κατασκευάζει κύκλο (Ο,ρ) όπου ρ η ακτίνα του με τυχαίο μήκος.
Ονομάζουμε Β και Ε τα σημεία που ο κύκλος τέμνει τις πλευρές Οx και Oy τις γωνίας αντίστοιχα.
Στο σημείο αυτό εκτελεί την λεγόμενη νεύση …
Θεωρεί σημείο Δ του κύκλου ώστε οι ευθείες ΕΔ και ΒΟ προεκτεινόμενες να τέμνονται σε σημείο Γ ώστε να είναι ΓΔ=ρ. Μετά ισχυρίζεται ότι η γωνία $\Delta O\Gamma$ έχει μέτρο το 1/3 του μέτρου της γωνίας α.



Οι μαθητές καλούνται :

Α) Να δικαιολογήσουν γιατί με τους παραπάνω τρόπους γίνεται δυνατή η τριχοτόμηση μιας οποιασδήποτε γωνίας

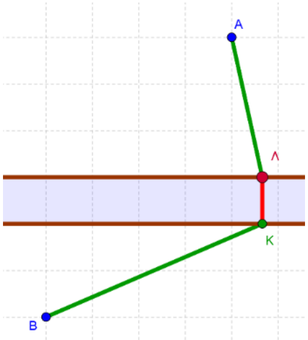
Β) Να βρουν ιστορικά στοιχεία σχετικά με τα άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας και ειδικά για την τριχοτόμηση της γωνίας. Την εργασία τους να την παρουσιάσουν στην τάξη τους.

6η εργασία : Προβλήματα βέλτιστης διαδρομής

Οι μαθητές καλούνται να ασχοληθούν με τα παρακάτω δύο προβλήματα, με τη βοήθεια εφαρμογών GeoGebra που καθοδηγούν.

Πρόβλημα 1ο

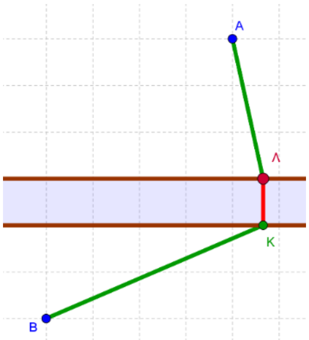
Στις δύο όχθες ενός ποταμού με σταθερό πλάτος βρίσκονται οι πόλεις Α και Β. Σε ποιο σημείο πρέπει να κατασκευάσουμε γέφυρα ΛΚ (η οποία θα συνδέει τις δύο όχθες κάθετα) ώστε να ισχύει ΑΛ=ΚΒ ;



Για να λύσουμε το πρόβλημα θα πρέπει να θυμηθούμε ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει των άκρων του τμήματος.
Βέβαια εδώ το πλάτος του ποταμού μας χαλάει …
Αν δεν υπήρχε;

Πρόβλημα 2ο

Σε ποιο σημείο πρέπει να κατασκευάσουμε γέφυρα ΛΚ (η οποία θα συνδέει τις δύο όχθες κάθετα) ώστε το συνολικό μήκος ΑΛ+ΛΚ+ΚΒ να είναι το ελάχιστο δυνατό ;

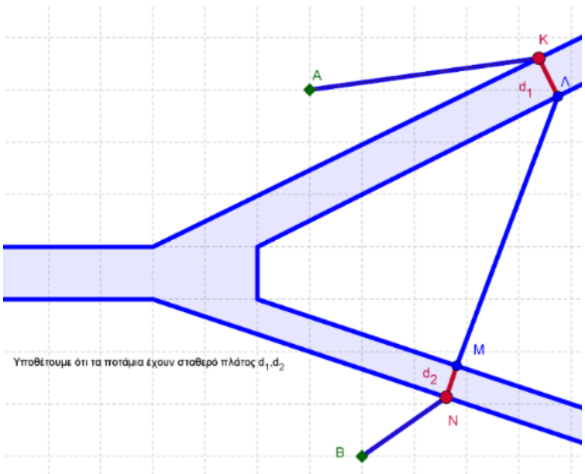


Ως βοήθεια έχουν τις εφαρμογές GeoGebra που δίνουν ιδέες.

Συμπληρωματικά μπορεί να δοθεί και το παρακάτω 3ο πρόβλημα …

Στο δέλτα ενός ποταμού, στις θέσεις Α και Β βρίσκονται δύο πόλεις.

Θέλουμε να κατασκευάσουμε τις γέφυρες ΚΛ και ΜΝ κάθετες στις όχθες ώστε το συνολικό μήκος ΑΚ+ΚΛ+ΛΝ+ΝΒ να είναι το ελάχιστο δυνατό.



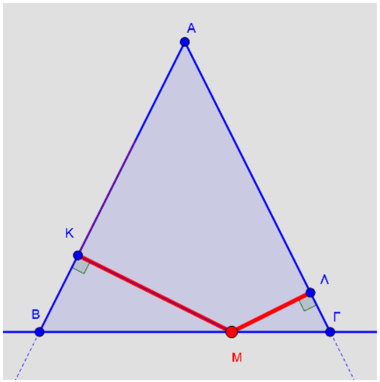
Εργασία 7^{η} : Θεώρημα Viviani

Vincenzo Viviani
(1622 –1703)

Με βάση το παρακάτω κείμενο ….

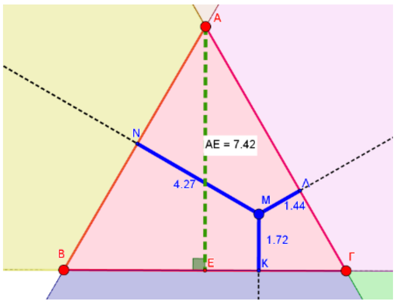
Ο **Vincenzo Viviani** ήταν Ιταλός μαθηματικός, μαθητής των Torricelli και Galileo . Ασχολήθηκε με μια ιδιότητα των ισοσκελών τριγώνων διατυπώνοντας ένα θεώρημα που προς τιμή του ονομάζεται Θεώρημα του Viviani.

Ο Viviani διατύπωσε την πρόταση :



« Έστω Μ τυχαίο σημείο της βάσης ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ. Από το Μ φέρνουμε τις αποστάσεις του ΜΚ και ΜΛ από τις ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Τότε το άθροισμα ΜΚ+ΜΛ είναι σταθερό και δεν εξαρτάται από τη θέση του Μ»

Στην περίπτωση όπου το σημείο Μ βρίσκεται στην ευθεία ΒΓ αλλά είναι εξωτερικό σημείο του τμήματος ΒΓ ισχύει ότι η διαφορά των αποστάσεων είναι σταθερή.



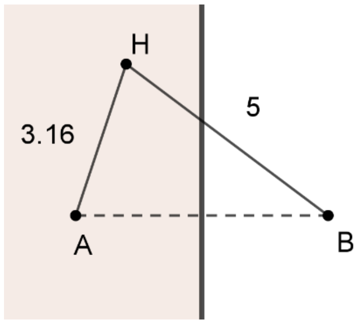
Το θεώρημα παίρνει μία ακόμα πιο ενδιαφέρουσα μορφή όταν το σημείο Μ βρίσκεται στο εσωτερικό ενός ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ. Τότε φέρνουμε τις αποστάσεις από τις τρεις πλευρές του και το άθροισμα των αποστάσεων είναι σταθερό και ίσο με ένα οποιοδήποτε ύψος του ισοπλεύρου τριγώνου. (όλα τα ύψη σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο είναι ίσα)

Οι μαθητές :
Α) Βρίσκουν ιστορικά στοιχεία για τη ζωή και το έργο του Viviani.
Β) Αποδεικνύουν τα πρώτο θεώρημα με τη βοήθεια της εφαρμογής.
Γ) Αποδεικνύουν το δεύτερο θεώρημα.
Δ) Ασχολούνται με το ερώτημα που θέτει η εφαρμογή.

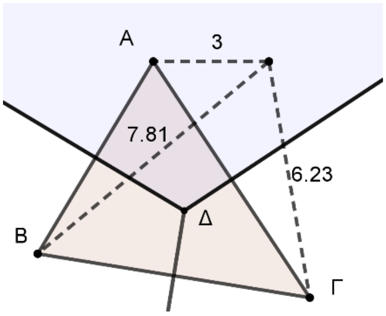
Ως βοήθεια έχουν τις εφαρμογές GeoGebra που δίνουν ιδέες.

Εργασία 8η : Διαγράμματα Voronoi

Με βάση το κείμενο:



Γνωρίζουμε ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει των άκρων του ευθυγράμμου τμήματος.
Συγχρόνως η μεσοκάθετος χωρίζει το επίπεδο σε δύο μέρη (ημιεπίπεδα) όπου το κάθε ένα αποτελείται από σημεία που απέχουν μικρότερη απόσταση από το ένα άκρο σε σχέση με το άλλο.



Γνωρίζουμε επίσης ότι οι τρεις μεσοκάθετοι των πλευρών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο το περίκεντρο. Οπότε το περίκεντρο και οι μεσοκάθετοι χωρίζουν το επίπεδο σε τρεις περιοχές που τα σημεία της κάθε μιας απέχουν μικρότερη απόσταση από την μία κορυφή σε σχέση με τις άλλες.

Την ιδιότητα αυτή μπορούμε να την χρησιμοποιήσουμε για να λύσουμε προβλήματα.

Για παράδειγμα

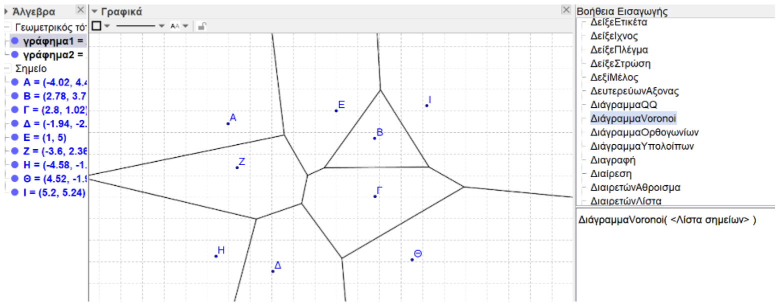
Α) Σε μία πόλη υπάρχουν τρία νοσοκομεία στις θέσεις Α,Β,Γ. Ο Δήμαρχος για να εξυπηρετήσει καλύτερα τις ανάγκες των δημοτών ζητά από τις υπηρεσίες υγείας του Δήμου να του φτιάξουν ένα χάρτη που να χωρίζει την πόλη σε τρεις περιοχές με βάση την απόσταση από το κάθε νοσοκομείο. Ο στόχος είναι οι πολίτες να γνωρίζουν ανάλογα με το που μένουν ποιο νοσοκομείο είναι πλησιέστερα. Μπορείτε να βοηθήσετε;

Β) Για την καλύτερη εξυπηρέτηση των πολιτών αποφασίζεται να χτιστεί και ένα ακόμα νοσοκομείο στη θέση Δ. Χωρίστε την πόλη σε τέσσερις περιοχές εξυπηρέτησης πολιτών με βάση την πλησιέστερη απόσταση από το κάθε νοσοκομείο.

Το πρόβλημα που αντιμετωπίσαμε στις προηγούμενες σελίδες απασχόλησε τον Ρώσο μαθηματικό Georgy Feodosevich Voronoi, ο οποίος έδωσε και για πρώτη φορά τη λύση του γενικεύοντάς το.
Δηλαδή αν υποθέσουμε ότι έχουμε πέντε σημεία με ποια διαδικασία – αλγόριθμο μπορούμε να χωρίσουμε το επίπεδο σε πέντε περιοχές που η κάθε μία θα αποτελείται από σημεία που βρίσκονται πλησιέστερα σε ένα σημείο σε σχέση με τα υπόλοιπα.
Το ίδιο πρόβλημα με έξι σημεία ή γενικεύοντας με οποιαδήποτε αριθμό σημείων.

Georgy Feodosevich Voronoi –(1868–1908)

Το GeoGebra έχει τη δυνατότητα γράφοντας στο πεδίο εισαγωγής Voronoi[A,B,Γ,Δ,Ε,Ζ,Η,Ι,Θ] να σχηματίσει αμέσως το διάγραμμα Voronoi για τα σημεία Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ,Η,Δ,Ι ή για όσα σημεία θελήσουμε να εισαγάγουμε στο φύλλο σχεδίασης μας.



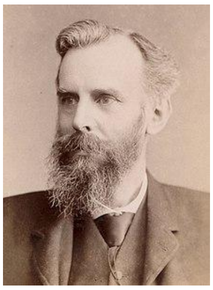
Οι μαθητές καλούνται :

Σε ένα φύλλο του τετραδίου σας σημειώστε 3 σημεία. Χωρίστε το επίπεδο του φύλλου εργασίας σε τρεις περιοχές που τα σημεία της κάθε μιας, απέχουν μικρότερη απόσταση από την μία κορυφή σε σχέση με τις άλλες.
Θεωρείστε 4 σημεία και εργαστείτε παρόμοια.
Ανοίξτε την εφαρμογή και δουλέψτε για περισσότερα σημεία.
Παρατηρείστε πως αλλάζει η λύση με την προσθηκη ενός επιπλέον σημείου.

Ως βοήθεια δίνεται εφαρμογή GeoGebra όπου ο μαθητής μπορεί να βοηθηθεί.

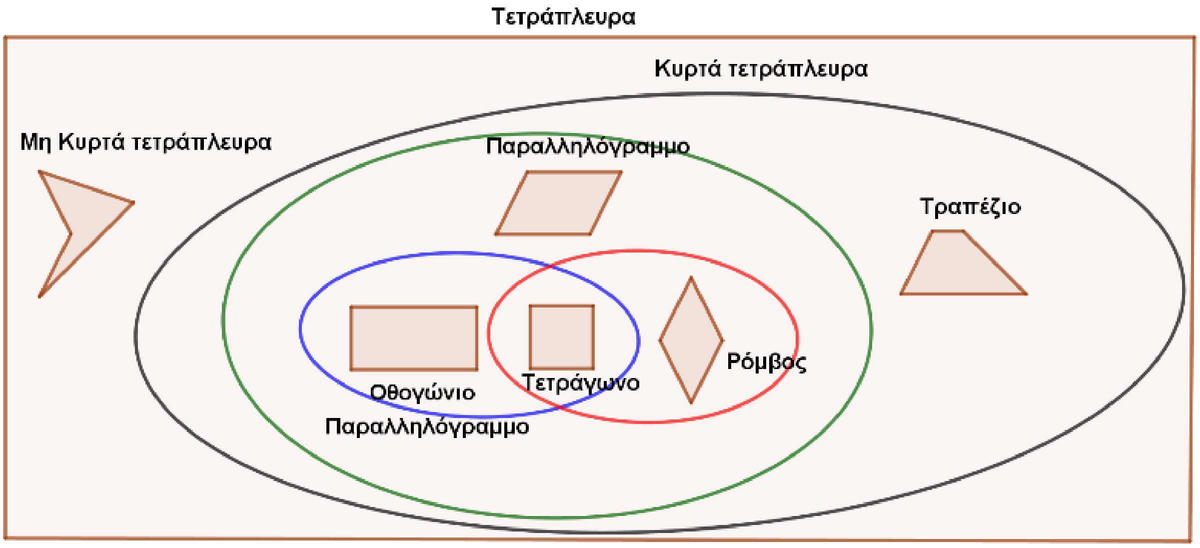
Εργασία 9η : Διαγράμματα Venn

Με βάση το κείμενο:



Ο John Venn , (1834–1923) ήταν Άγγλος Μαθηματικός που εργάστηκε σε τομείς όπως Λογική, Θεωρία Συνόλων, Πιθανότητες και Στατιστική. Το 1881 δημοσιεύει το “**Symbolic Logic**” στο οποίο εμφανίζεται ένας νέος τρόπος ταξινόμησης και παρουσίασης των συνόλων. Ο συμβολισμός αυτός θα γινόταν γνωστός ως **διαγράμματα Venn**.

Τα τετράπλευρα με τα οποία ασχοληθήκαμε προηγούμενα μπορούν τα ταξινομηθούν με την βοήθεια ενός τέτοιου διαγράμματος. Η πρώτη διάκριση γίνεται ανάμεσα στα κυρτά και μη κυρτά τετράπλευρα. Μη κυρτό λέγεται ένα τετράπλευρο όταν ο φορέας μιας πλευράς του το χωρίζει σε δύο μέρη. Στα κυρτά τετράπλευρα περιλαμβάνονται τα τραπέζια και τα παραλληλόγραμμα. Στα παραλληλόγραμμα περιλαμβάνονται τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα και οι ρόμβοι. Παρατηρήστε ότι τα δύο αυτά σύνολα τετράπλευρων (ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ρόμβος) έχουν κοινά στοιχεία τους τα τετράγωνα. Αφού όπως μάθαμε τετράγωνο είναι το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος.



Οι μαθητές καλούνται να ψάξουν στο διαδίκτυο τον όρο «**quadrilateral classification**» - ταξινόμηση τετραπλεύρων και να παρουσιάσουν την δική τους πρόταση.

Για τις δραστηριότητες που απαιτούν από τους μαθητές να φτιάξουν την δικιά τους εφαρμογή GeoGebra επιλέξαμε να δίνουμε μία «μισό-φτιαγμένη». Εκεί ο μαθητής ακολουθεί τα βήματα – οδηγίες και δημιουργεί.

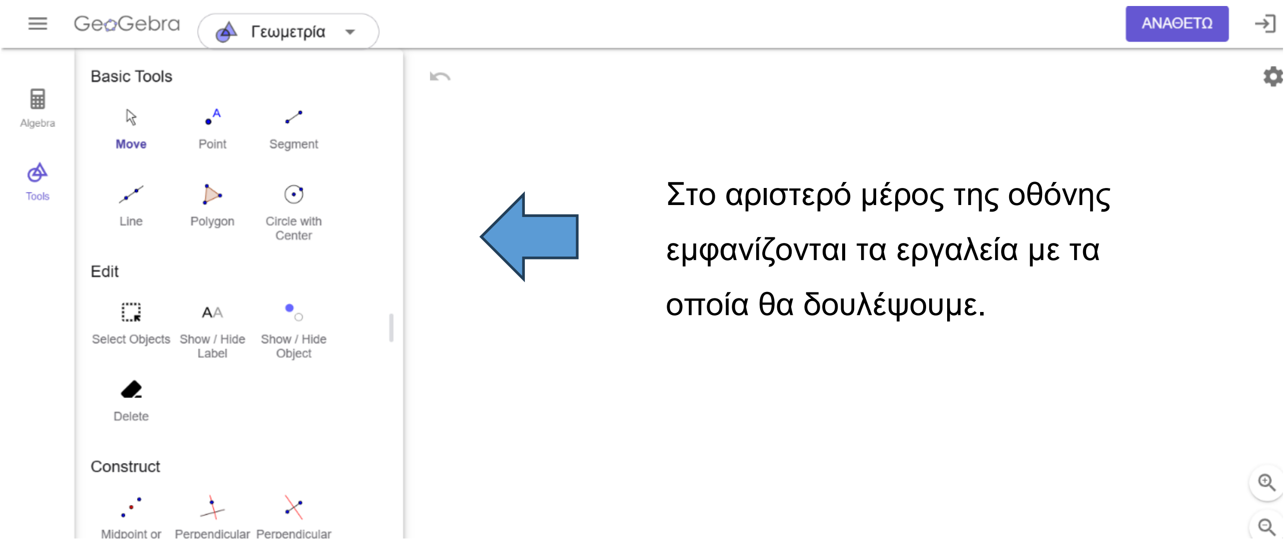
Παρακάτω παρουσιάζουμε εναλλακτικά φύλλα εργασίας όπου ο καθηγητής μπορεί να δώσει στους μαθητές του.

Εργασία 1η : Κατασκευή διαδικτυακής εφαρμογής GeoGebra για τον εγγεγραμμένο και περιγεγραμμένο κύκλο τριγώνου

Στους μαθητές δίνεται το παρακάτω φύλλο εργασίας – κατασκευής.

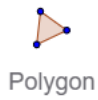
Βήματα κατασκευής της εφαρμογής:

1. Ανοίγουμε ένα φυλλομετρητή διαδικτύου (browser) και στο σύνδεσμο https://www.geogebra.org/calculator βρίσκουμε τη διαδικτυακή εφαρμογή **GeoGebra** και επιλέγουμε την **Γεωμετρία (Geometry).**

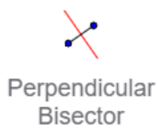


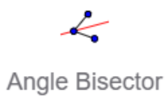
2. Επιλέγουμε τρία σημεία στο φύλλο σχεδίασης με τη βοήθεια του εργαλείου **Σημείο (Point).**

3. Σχεδιάζουμε τρίγωνο με τη βοήθεια του εργαλείου **Πολύγωνο** – Polygon.



4. Με τη βοήθεια των εργαλείων **Μεσοκάθετη τμήματος (Perpendicular Bisector)** και **Διχοτόμος γωνίας (Angle Bisector)** ακολουθώντας τις οδηγίες κατασκευάζουμε μεσοκαθέτους και διχοτόμους.



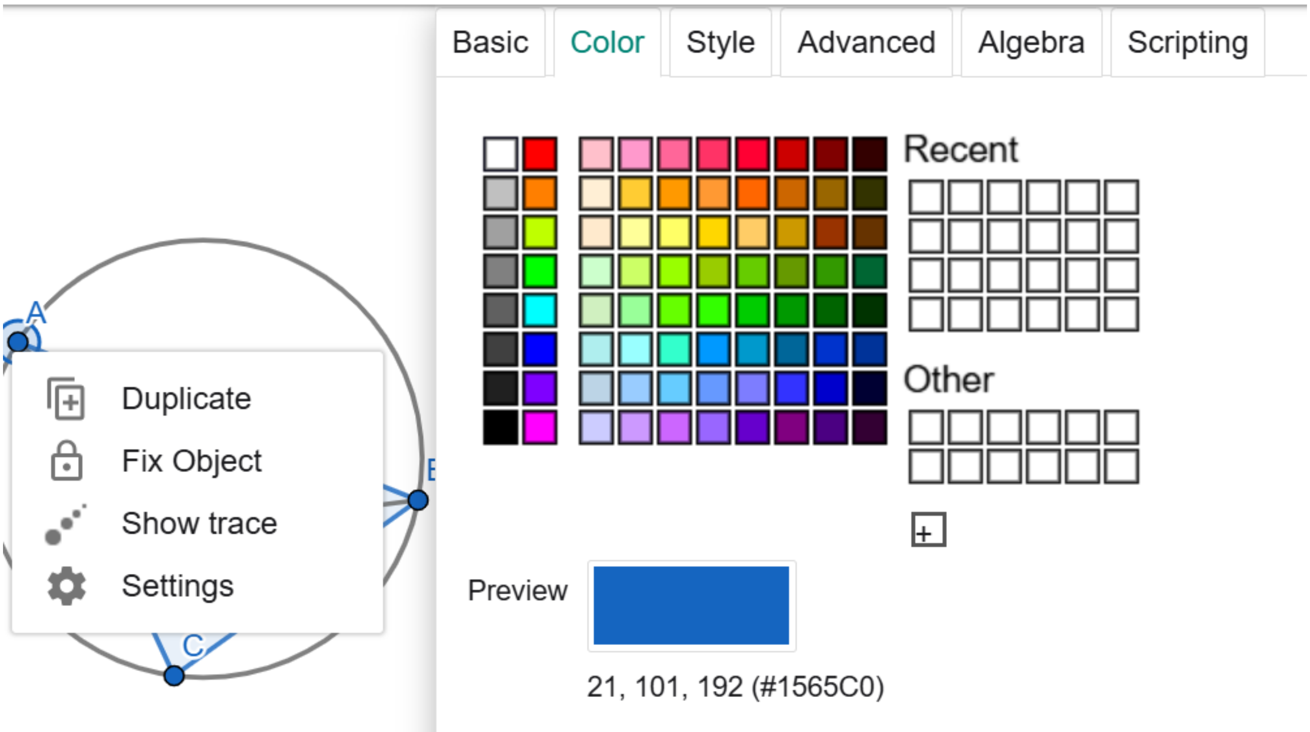


5. Με το εργαλείο **Τομή (intersect)** βρίσκουμε το Περίκεντρο και το Έγκεντρο του τριγώνου.

6. Με το εργαλείο **Κύκλος με κέντρο που διέρχεται από ένα σημείο (Circle with center trough Point)** κατασκευάζουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο.


Circle with Center

7. Για να είναι πιο καλαίσθητη η εφαρμογή σας, κάποια στοιχεία (γραμμές- σημεία) μπορείτε να αλλάξετε το στιλ ή το χρώμα ή το όνομα. Πατώντας πάνω τους με δεξί κλίκ, εμφανίζεται η επιλογή Setting, όπου μετά είμαστε σε θέση να επιλέξουμε όποιο χρώμα θέλουμε και με την επιλογή basic αλλάζουμε στιλ, όνομα, πάχος γραμμάτων.



Μπορούμε επίσης με τις επιλογές **Εμφάνισε το Αντικείμενο (Show Object)** να κρύψουμε ή να εμφανίσουμε το αντικείμενο ή **Εμφάνισε ετικέτα (Show Label)** όπου μπορείτε να εμφανίσουμε ή να κρύψουμε την ετικέτα – όνομα του αντικειμένου που επεξεργαζόμαστε.

Show / Hide Label


Show / Hide Object

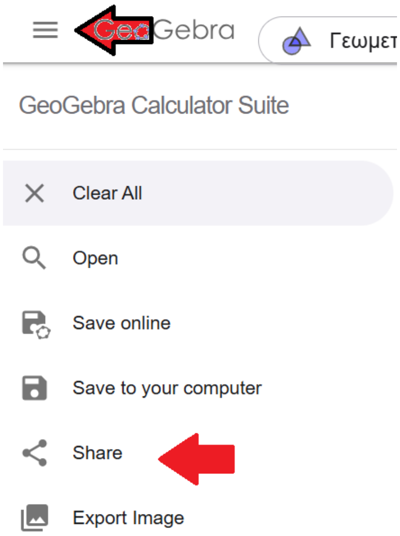
Εργασίες προς διερεύνηση

1. Μετακινώντας μία κορυφή του τριγώνου, με το βελάκι, διαπιστώστε πότε από τρία σημεία διέρχεται ένας κύκλος.


Move

2. Κατασκευάστε τον εγγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου.

3. Πότε το περίκεντρο και το έγκεντρο είναι το ίδιο σημείο. Διατυπώστε την σχετική πρόταση και αποδείξτε την.



Παραδοτέο

Πατήστε τις τρεις γραμμές πάνω δεξιά και επιλέξτε **Μοίρασμα (Share)** και στείλτε **το αρχείο GeoGebra (ggb)** στο email του καθηγητή σας με θέμα «Κύκλοι στο τρίγωνο και το επίθετό σας». Επιπλέον **επισυνάψτε αρχείο word** με ένα σύντομο και περιεκτικό κείμενο – απάντηση στις εργασίες προς διερεύνηση 1 και 3.

Εργασία 2^{η} : Κατασκευή διαδικτυακής εφαρμογής GeoGebra για τα κέντρα του τριγώνου (Έγκεντρο – περίκεντρο – βαρύκεντρο – ορθόκεντρο)

Στους μαθητές δίνεται το παρακάτω φύλλο εργασίας – κατασκευής

Βήματα κατασκευής της εφαρμογής:

1. Ανοίγουμε το **GeoGebra** και επιλέγουμε την ***Γεωμετρία* (Geometry)**.

2. Επιλέγουμε τρία σημεία στο φύλλο σχεδίασης με τη βοήθεια του εργαλείου **Σημείο (Point).**

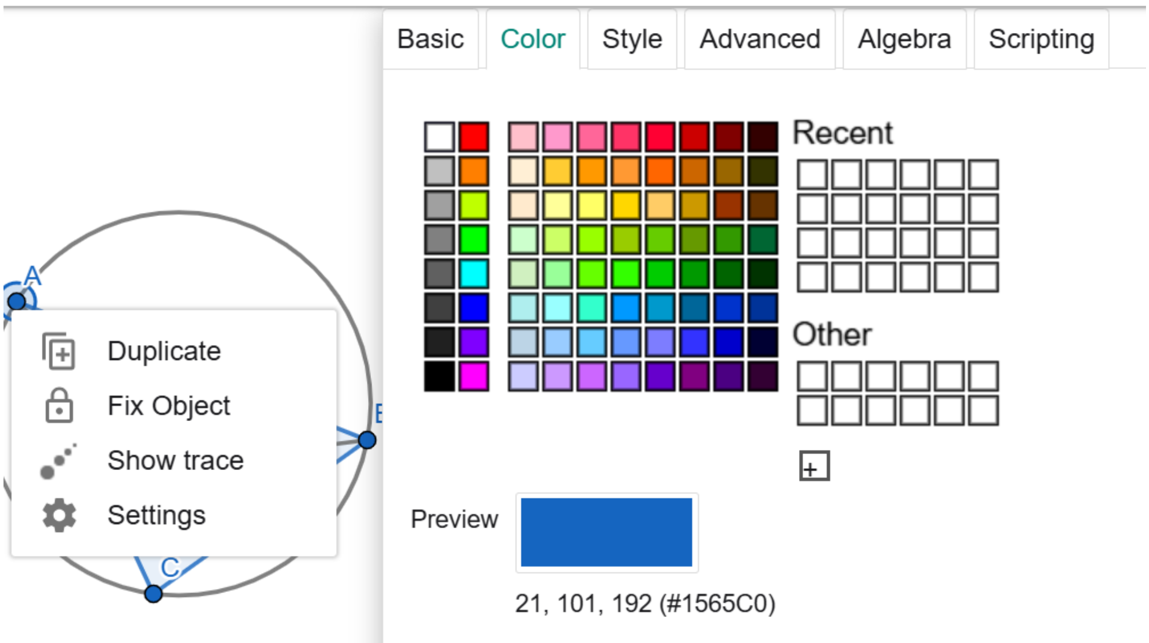
3. Σχεδιάζουμε τρίγωνο με τη βοήθεια του εργαλείου **Πολύγωνο (Polygon).**

4. Με τη βοήθεια των εργαλείων **Μεσοκάθετος τμήματος (Perpendicular Bisector), Διχοτόμος γωνίας (Angle Bisector)** και **Κάθετη γραμμή (Perpendicular Line)**, ακολουθώντας τις οδηγίες κατασκευάζουμε μεσοκάθετους, διχοτόμους, και ύψη.

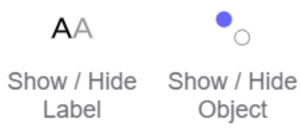
5. Με το εργαλείο **μέσο ή κέντρο (Midpoint or Center)** βρίσκουμε μέσο πλευράς τριγώνου με σκοπό να κατασκευάσουμε διαμέσους.

6. Με το εργαλείο **Τομή (intersect)** βρίσκουμε το Περίκεντρο, το Έγκεντρο, Βαρύκεντρο και το Ορθόκεντρο του τριγώνου.

7. Για να είναι πιο καλαίσθητη η εφαρμογή σας, κάποια στοιχεία (γραμμές- σημεία) μπορείτε να αλλάξετε το στιλ ή το χρώμα ή όνομα. Πατώντας πάνω τους με δεξί κλίκ, εμφανίζεται η επιλογή Setting, όπου μετά είμαστε σε θέση να επιλέξουμε όποιο χρώμα θέλουμε και με την επιλογή basic αλλάζουμε στιλ, όνομα, πάχος γραμμάτων.



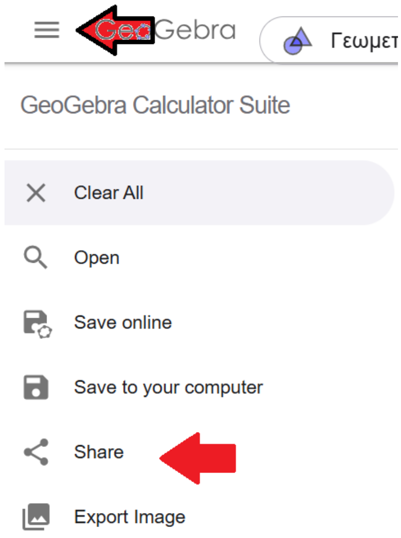
Μπορούμε επίσης με τις επιλογές **Εμφάνισε το Αντικείμενο (Show Object)** να κρύψουμε ή να εμφανίσουμε το αντικείμενο ή **Εμφάνισε ετικέτα (Show Label)** όπου μπορείτε να εμφανίσουμε ή να κρύψουμε την ετικέτα – όνομα του αντικειμένου που επεξεργαζόμαστε.



Εργασία – Διερεύνηση

Ο στόχος της εφαρμογής είναι να φτιάξουμε ένα τρίγωνο με τα τέσσερα βασικά σημεία του. Το περίκεντρο, το έγκεντρο, το ορθόκεντρο και το βαρύκεντρο.

Πως μπορούμε να μαντέψουμε ποιο σημείο είναι ποιο <u>χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τα εργαλεία με τα οποία τα κατασκευάσαμε</u>, αλλά απλώς έχοντας την δυνατότητα να μετακινούμε τις κορυφές του τριγώνου;



Παραδοτέο

Πατήστε τις τρεις γραμμές πάνω δεξιά και επιλέξτε **Μοίρασμα (Share)** και στείλτε **το αρχείο GeoGebra (ggb)** στο <u>email του καθηγητή</u> σας με θέμα «<u>Βασικά κέντρα τριγώνου και το επίθετό σας</u>». Επιπλέον **επισυνάψτε αρχείο word** με ένα σύντομο και περιεκτικό κείμενο – απάντηση στην εργασία προς διερεύνηση.

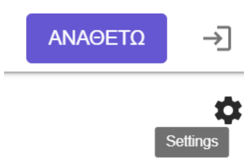
Εργασία 3η : Κατασκευή διαδικτυακής εφαρμογής GeoGebra για τη τριγωνική ανισότητα

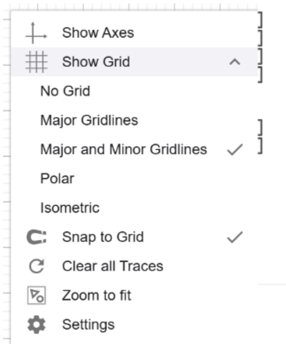
Στους μαθητές δίνεται το παρακάτω φύλλο εργασίας – κατασκευής

Βήματα κατασκευής της εφαρμογής:

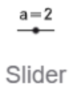
1. Ανοίγουμε το **GeoGebra** και επιλέγουμε την **Γεωμετρία (Geometry).**

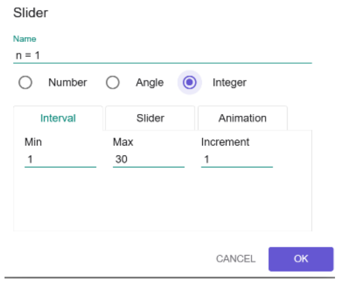
2. Στο δεξί μέρος του φύλλου εργασίας, πατάμε settings, όπου μας δίνεται η δυνατότητα να επιλέξουμε το είδος του πλέγματος που θέλουμε να εργαστούμε.



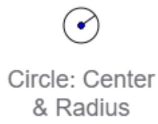


3. Με το εργαλείο slider, επιλέγουμε να δημιουργηθούν τρεις **δρομείς (sliders) –** πατώντας την επιλογή **Integer** Ονομάζοντάς τους α,β και γ.

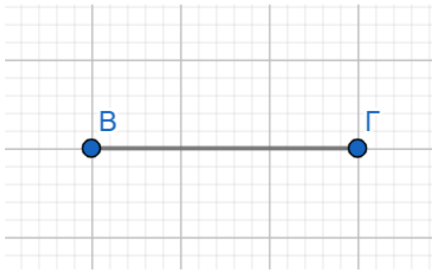




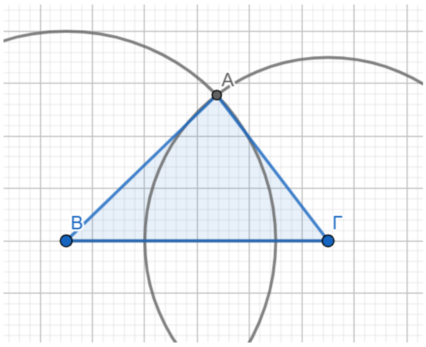
4. Κατασκευάζουμε ένα τυχαίο σημείο και μετά με το εργαλείο **Κύκλος με κέντρο και ακτίνα (Circle with Center and Radius)** γράφουμε κύκλο επιλέγοντας ακτίνα ίση με α.



5. Πάνω του παίρνουμε άλλο ένα σημείο και κατασκευάζουμε τμήμα (με άκρα κέντρο κύκλου και σημείο) ας προσπαθήσουμε το τμήμα να είναι σε οριζόντια θέση . Με την επιλογή Show Object «σβήνουμε» τον κύκλο, αλλάζουμε τις ονομασίες των σημείων και η εφαρμογή μας θα έχει τη διπλανή μορφή.



6. Δώσε στους δρομείς τις τιμές α=10, β=7 , γ=8. Παρατηρήστε ότι το τμήμα που έχουμε κατασκευάσει έχει «μεγαλώσει» και έχει μήκος τώρα 10 μονάδες μήκους. Επιλέγουμε το εργαλείο **Κύκλος με κέντρο και ακτίνα (Circle with Center and Radius)** και γράφουμε τους κύκλους (Β, γ) και (Γ, β). Παρατηρήστε ότι οι δύο κύκλοι τέμνονται. Με το εργαλείο **τομή (Intersect)** βρίσκουμε ένα σημείο τομής των δύο κύκλων και το ονομάζουμε Α. Τέλος με το εργαλείο **Πολύγωνο** – Polygon κατασκευάζουμε το τρίγωνο με κορυφές το σημείο τομής και τα άκρα το τμήματος.

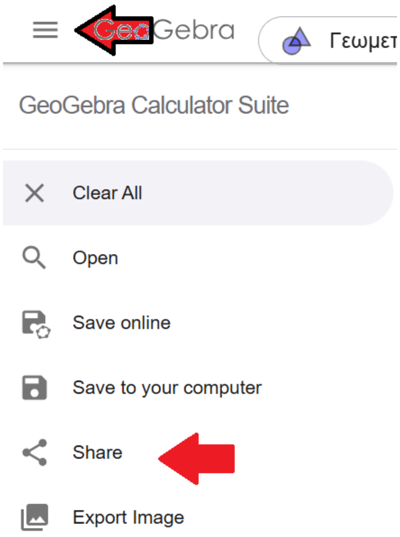


7. Αυξομείωσε τις τιμές στους δρομείς και παρατήρησε.

Εργασίες προς διερεύνηση

1. Δώσε στους δρομείς τις τιμές α=6, β=4, γ=3
2. Δώσε στους δρομείς τις τιμές α=5, β=4, γ=3 το τρίγωνο είναι ορθογώνιο; Γιατί;
3. Δώσε στους δρομείς τις τιμές α=7, β=4, γ=2 τι παρατηρείς;
4. Δώσε στους δρομείς τις τιμές α=7, β=4, γ=3 τι παρατηρείς;

5. Από τα παραπάνω μήπως είσαι σε θέση να διατυπώσεις μία γενική πρόταση για το πότε τρία τμήματα α, β, γ μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή τριγώνου με πλευρές τα τμήματα αυτά;



Παραδοτέο

Πατήστε τις τρεις γραμμές πάνω δεξιά και επιλέξτε **Μοίρασμα (Share)** και στείλτε **το αρχείο GeoGebra (ggb)** στο email του καθηγητή σας με θέμα «Κατασκευή τριγώνου και το επίθετό σας». Επιπλέον **επισυνάψτε αρχείο word** με ένα σύντομο και περιεκτικό κείμενο – απάντηση στο 5^{ο} ερώτημα.

Εργασία 4^{η} : Κατασκευή διαδικτυακής εφαρμογής GeoGebra για είδος του τετραπλεύρου που ορίζεται από τα μέσα των πλευρών ενός τετράπλευρου ΑΒΓΔ.

Στους μαθητές δίνεται το παρακάτω φύλλο εργασίας – κατασκευής.

Βήματα κατασκευής της εφαρμογής

1. Κατασκευάστε τετράπλευρο ΑΒΓΔ.
2. Θεωρείστε τα μέσα Κ, Λ, Μ, Ν των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα.

Ερώτηση 1^{η}

Δικαιολογείστε γιατί το ΚΛΜΝ είναι **παραλληλόγραμμο**.

Ερώτηση 2^{η}

Μετακινείστε τις κορυφές Α, Β, Γ, Δ ώστε το ΚΛΜΝ να είναι **ορθογώνιο παραληλόγραμμο**. Ποιες είναι οι επιπλέον ιδιότητες που πρέπει να έχει το αρχικό τετράπλευρο ώστε το ΚΛΜΝ να είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο; Επιβεβαιώστε τις εικασίες σας χρησιμοποιώντας τα εργαλεία μέτρησης του λογισμικού. Διατυπώστε τις υποθέσεις που πρέπει να ισχύουν ώστε το ΚΛΜΝ να είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και αποδείξτε την πρόταση που έχετε καταλήξει.

Ερώτηση 3^{η}

Μετακινείστε τις κορυφές Α,Β,Γ,Δ ώστε το ΚΛΜΝ να είναι **ρόμβος**. Ποιες είναι οι επιπλέον ιδιότητες που πρέπει να έχει το αρχικό τετράπλευρο ώστε το ΚΛΜΝ να είναι ρόμβος; Επιβεβαιώστε τις εικασίες σας χρησιμοποιώντας τα εργαλεία μέτρησης του λογισμικού. Διατυπώστε τις υποθέσεις που πρέπει να ισχύουν ώστε το ΚΛΜΝ να είναι ρόμβος και αποδείξτε την πρόταση που έχετε καταλήξει.

Ερώτηση $4^{η}$

Μετακινείστε τις κορυφές Α, Β, Γ, Δ ώστε το ΚΛΜΝ να είναι **τετράγωνο**. Ποιες είναι οι επιπλέον ιδιότητες που πρέπει να έχει το αρχικό τετράπλευρο ώστε το ΚΛΜΝ να είναι τετράγωνο; Επιβεβαιώστε τις εικασίες σας χρησιμοποιώντας τα εργαλεία μέτρησης του λογισμικού. Διατυπώστε τις υποθέσεις που πρέπει να ισχύουν ώστε το ΚΛΜΝ να είναι τετράγωνο και αποδείξτε την πρόταση που έχετε καταλήξει.

Εργασίες προς διερεύνηση

Παραδοτέο

Πατήστε τις τρεις γραμμές πάνω δεξιά και επιλέξτε **Μοίρασμα (Share)** και στείλτε **το αρχείο GeoGebra (ggb)** στο <u>email του καθηγητή</u> σας με θέμα «<u>Άσκηση και το επίθετό σας</u>». Επιπλέον **επισυνάψτε αρχείο word** με ένα σύντομο και περιεκτικό κείμενο – απάντηση στις ερωτήσεις 1,2,3,4.