**Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων**

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά Προσανατολισμού, Θετικών & Οικονομικών Σπουδών**
**Ημερομηνία: 4 Ιουνίου 2024**

**Ενδεικτικές Απαντήσεις Θεμάτων**

**Θέμα Α**
**Α1.** *Σχολικό βιβλίο, σελίδα 76 (Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών)*
**Α2.** *Σχολικό βιβλίο, σελίδα 155 (Ορισμός κυρτής συνάρτησης)*
**Α3.** *Σχολικό βιβλίο, σελίδα 216 (Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού)*
**Α4.**

- **α. Σωστό**
- **β. Σωστό**
- **γ. Λάθος**
- **δ. Λάθος**
- **ε. Σωστό**

**ΘΕΜΑ Β**

**Β1.** Παρατηρούμε ότι $D_g = D_h = [1, +\infty)$. Η συνάρτηση $f = \frac{g}{h}$ ορίζεται για $\begin{cases} x \in D_g \cap D_h \\ h(x) \neq 0 \end{cases}$.

Λύνουμε την εξίσωση: $h(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 1$.

Επόμενως, η $f$ ορίζεται για $x > 1$. Δηλαδή $D_f = (1, +\infty)$ με τύπο:

$$f(x) = \left(\frac{g}{h}\right)(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}{\frac{x-1}{\sqrt{x}}} = \frac{x+1}{x-1}$$

Η συνάρτηση $r = g \cdot h$ ορίζεται στο $D_r = D_g \cap D_h = [1, +\infty)$ με τύπο:

$$r(x) = (g \cdot h)(x) = g(x) \cdot h(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = x - \frac{1}{x}$$

**Β2.** Για $x > 1$ η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2} < 0$$

Συνεπώς, η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_f$, άρα έχει και την ιδιότητα «1-1» και ορίζεται η αντίστροφή της.
Το σύνολο τιμών της συνεχούς συνάρτησης $f$ θα είναι:
$f\big((1, +\infty)\big) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 1^+} f(x)\right) = (1, +\infty)$,

διότι: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$ και $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$.

Άρα η αντίστροφη ορίζεται και αυτή στο $(1,+\infty)$. Για την εύρεση του τύπου της έχουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow xy - y = x + 1 \Leftrightarrow (y-1)x = 1 + y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1}$$

Τελικά:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}, \qquad x > 1$$

Παρατηρούμε ότι $f^{-1} = f$ αφού κάθε $x > 1$ ισχύει: $f^{-1}(x) = f(x)$.

***Εναλλακτικά:***

Θεωρούμε $x_1, x_2 \in (1,+\infty)$ με

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{x_2+1}{x_2-1} \Leftrightarrow (x_1+1)(x_2-1) = (x_1-1)(x_2+1)$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2 - x_1 + x_2 - 1 = x_1x_2 + x_1 - x_2 - 1$$

$$\Leftrightarrow 2x_2 = 2x_1 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Επομένως η $f$ έχει την ιδιότητα «1-1» και ορίζεται η αντίστροφή της.

Θέτουμε $y = f(x),\ x > 1$ και έχουμε:

$$y = \frac{x+1}{x-1}, \qquad x > 1$$

$$\Leftrightarrow xy - y = x + 1, \qquad x > 1$$

$$\Leftrightarrow (y-1)x = 1 + y, \qquad x > 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1}, \qquad x > 1, \qquad y \neq 1$$

Επειδή: $x > 1$ είναι:

$$\frac{y+1}{y-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{y+1-(y-1)}{y-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y > 1$$

Τελικά, η αντίστροφη ορίζεται στο $(1,+\infty)$ με:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}, \qquad x > 1$$

Παρατηρούμε ότι $f^{-1} = f$ αφού κάθε $x > 1$ ισχύει: $f^{-1}(x) = f(x)$.

**Β3.** Η $r$ ορίζεται στο $[1,+\infty)$ επομένως εξετάζουμε αν έχει οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1 \text{ και } \lim_{x\to+\infty} (r(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x - \frac{1}{x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$.

**Β4.** Για την εξίσωση $\left(f^{-1}(f(x))\right)^2 = 1 + 4r(x)$, πρέπει $x > 1$. Έχουμε:

$$\left(f^{-1}(f(x))\right)^2 = 1 + 4r(x) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow x^2 - 1 = 4\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$$

$\Leftrightarrow (x^2-1)\left(1 - \frac{4}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 4$, γιατί $x > 1$.

**Ακολουθούν σύντομα οι απαντήσεις στα θέματα Γ και Δ.**

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Εφόσον η $f$ είναι συνεχής, είναι συνεχής στο $x = 2$, άρα:
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \Leftrightarrow e^{\lambda} = 1 + \lambda \Leftrightarrow \lambda = 0$, αφού $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

**Γ2.** Για $\lambda = 0$ είναι:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 5, & 0 \leq x < 2 \\ -x^2 + 4x - 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

Η $f$ είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(0,2)$ και $(2, +\infty)$ με:

$$f'(x) = \begin{cases} -2, & 0 < x < 2 \\ -2x + 4, & x > 2 \end{cases} = \begin{cases} -2, & 0 < x < 2 \\ -2(x - 2), & x > 2 \end{cases}$$

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,2) \cup (2, +\infty)$ και η $f$ είναι συνεχής στο $x = 2$ και στο $x = 0$, η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.
Τότε, για κάθε $x \in [0, +\infty)$ ισχύει $x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow f(x) \leq 5$.
Άρα, η $f$ παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $x = 0$ το $f(0) = 5$.

**Γ3.**
**i.** Η $f$ είναι συνεχής στο $[0,3]$, οπότε αρκεί να εξετάσουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,3)$.
Η $f$ είναι παραγωγίσιμη στα $(0,2)$ και $(2,3)$ με:

$$f'(x) = \begin{cases} -2, & 0 < x < 2 \\ -2(x - 2), & 2 < x < 3 \end{cases}$$

Επίσης:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-2x + 5 - 1}{x - 2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-2(x - 2)}{x - 2} = -2$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-x^2 + 4x - 3 - 1}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-x^2 + 4x - 4}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-(x - 2)^2}{x - 2} = 0$$

Άρα, η $f$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 2$, οπότε δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[2,3]$.

**ii.** Η κλίση της ευθείας $ΔΕ$ είναι:

$$\lambda = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{0 - 5}{3} = -\frac{5}{3}$$

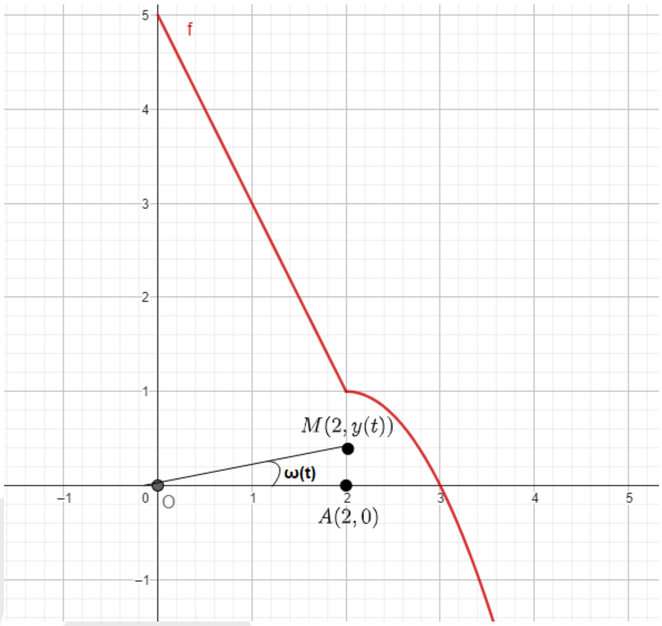
Επειδή για $x \in (0,2)$ είναι $f'(x) = -2 \neq -\frac{5}{3}$, λύνουμε για $x \in (2,3)$ την εξίσωση:

$$f'(x) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -2(x - 2) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow x - 2 = \frac{5}{6} \Leftrightarrow x = \frac{17}{6}$$

οπότε $\xi = \frac{17}{6} \in (2,3)$.

**Γ4.** Έστω $M(2,y)$. Τη χρονική στιγμή $t \geq 0$ ισχύει:
$y = y(t), y'(t) = 0{,}5\ \mu o\nu. \mu\acute{\eta}\kappa o\upsilon\varsigma\ /\ sec$
Έστω $t_0$ η χρονική στιγμή κατά την οποία το $M$ συναντά τη $C_f$.
Τότε $y(t_0) = f(2) = 1$.
Ισχύει ότι $\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{2}$, άρα κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$ είναι:

$$\varepsilon\varphi\omega(t) = \frac{y(t)}{2}$$




Τότε, παραγωγίζοντας κατά μέλη έχουμε:

$$\omega'(t)\big(1 + \varepsilon\varphi^2\omega(t)\big) = \frac{1}{2}y'(t)$$

$$\Leftrightarrow \omega'(t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega(t)}\right)$$

Τη χρονική στιγμή $t_0$ είναι $\varepsilon\varphi\omega(t_0) = \frac{y(t_0)}{2} = \frac{1}{2}$, άρα:

$$\omega'(t_0) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{1}{5}\ rad/sec$$

**Εναλλακτικά:**
Είναι: $M\big(2, y(t)\big), t \geq 0$ με $y'(t) = 0{,}5\ m/sec \Leftrightarrow y(t) = 0{,}5t + c$
Για $t = 0 \Longrightarrow y(0) = c \Leftrightarrow 0 = c$, οπότε $y(t) = 0{,}5\,t$. Άρα, $M(2, 0{,}5t), t \geq 0$.
Τη χρονική στιγμή $t = t_0$ το $M \in C_f$, οπότε $y_M = 1 \Leftrightarrow 0{,}5t_0 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}t_0 = 1 \Leftrightarrow t_0 = 2$
Έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\omega(t) = \frac{y_M}{x_M} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega(t) = \frac{0{,}5t}{2} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega(t) = \frac{1}{4}t$$

οπότε:

$$[1 + \varepsilon\varphi^2\omega(t)]\cdot\omega'(t) = \frac{1}{4}(1)$$

και για $t = t_0 = 2$ είναι:

$$\varepsilon\varphi\omega(t_0) = \varepsilon\varphi\omega(2) = \frac{1}{4}\cdot 2 = \frac{1}{2}$$

Άρα:

$$(1) \xRightarrow{t=t_0=2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\cdot\omega'(2) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{5}{4}\cdot\omega'(2) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \omega'(2) = \frac{1}{5}\ rad/sec.$$

**ΘΕΜΑ Δ**
**Δ1.** Για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) \leq 1 + \frac{1}{e}$ και επομένως υπάρχει $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) = 1 + \frac{1}{e}$$

Η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με:

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}+a\right)\cdot x-\ln x-ax}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

- Η $f$ είναι παραγωγωγίσιμη στο σημείο $x_0$.
- Η $f$ παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο αυτό.

Από το Θεώρημα Fermat ισχύει $f'(x_0)=0 \Leftrightarrow 1-\ln x_0=0 \Leftrightarrow \ln x_0=1 \Leftrightarrow x_0=e$

Άρα, $f(e)=1+\frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1+ae}{e}=1+\frac{1}{e} \Leftrightarrow 1+ae=e+1 \Leftrightarrow ae=e \Leftrightarrow a=1$

Οπότε, ο τύπος της $f$ είναι: $f(x)=\frac{\ln x+x}{x}$

**Δ2.** Ισχύει $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ για κάθε $x>0$.

$f'(x)=0 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} 1-\ln x=0 \Leftrightarrow x=e$

- $f'(x)<0 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} \ln x>1 \Leftrightarrow x>e$ οπότε $f$ γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2[e,+\infty)$
- $f'(x)>0 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} \ln x<1 \Leftrightarrow 0<x<e$ οπότε $f$ γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1(0,e]$

Επειδή η $f$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1=(0,e]$ ισχύει:
$f(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), f(e)\right]$ δηλαδή: $f(\Delta_1)=\left(-\infty, 1+\frac{1}{e}\right]$

| $x$ | $0$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | | $\nearrow$ | Ο.Μ. | $\searrow$ | |

Επειδή $0\in f(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδικός $x_0\in(0,e)$ τέτοιος ώστε: $f(x_0)=0$
Ισχύουν:

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}-\ln 2}{\frac{1}{2}}=\frac{1-2\ln 2}{1}<0$ και $f(1)=1>0$

Άρα, $f\left(\frac{1}{2}\right)<f(x_0)<f(1) \overset{f\uparrow \sigma\tau o\ (0,e]}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{2}<x_0<1$

Επειδή η $f$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2=[e,+\infty)$, ισχύει:
$f(\Delta_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(e)\right]=\left(1,\frac{1}{e}\right]$ αφού

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x+x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)=1$$

Επειδή $0\notin f(\Delta_2)$ η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $\Delta_2=[e,+\infty)$.

*Σχόλιο: Οι υποψήφιοι μπορούν να εφαρμόσουν το Θεώρημα Bolzano στο διάστημα* $\left[\frac{1}{2},1\right]$ *για να αποδείξουν την ύπαρξη ρίζας στο διάστημα αυτό, αλλά δεν εξασφαλίζει τη μοναδικότητα της ρίζας στο* $(0,+\infty)$. *Είναι απαραίτητη και πάλι η εύρεση του συνόλου τιμών.*

**Δ3. i.** $f(4)=\frac{2\ln 2+4}{4}=\frac{\ln 2+2}{2}=f(e)$ και άρα η εξίσωση $f(x)=f(2)=f(4)$ έχει στο $(0,e]$ μοναδική λύση την $x=2$ και στο $[e,+\infty)$ μοναδική λύση την $x=4$.

**ii.** Ισοδύναμα έχουμε:

$2^x \le x^2 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} \ln 2^x \le \ln x^2 \Leftrightarrow x\ln 2 \le 2\ln x \Leftrightarrow 2\dfrac{\ln x}{x} \ge \dfrac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x} \ge \dfrac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x} + 1$
$\ge \dfrac{\ln 2}{2} + 1 \Leftrightarrow \dfrac{\ln x + x}{x} \ge \dfrac{\ln 2 + 2}{2} \Leftrightarrow f(x) \ge f(2) = f(4) \quad (1)$

- Για κάθε $x \in (0,e]$ έχουμε $f(x) \ge f(2) \overset{f\uparrow\Delta_1}{\Longleftrightarrow} 2 \le x \le e$
- Για κάθε $x \in [e,+\infty)$ έχουμε $f(x) \ge f(4) \overset{f\downarrow\Delta_2}{\Longleftrightarrow} e \le x \le 4$

Επομένως: $x \in [2,4]$.

***Εναλλακτικά:***

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = 2^x - x^2,\ x > 0$. Η $\varphi$ είναι συνεχής και λύνουμε $\varphi(x) = 0$

$\Leftrightarrow\ 2^x = x^2 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} x\ln 2 = 2\ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} + 1 = \frac{\ln 2}{2} + 1 \Leftrightarrow f(x) = f(2) = f(4).$

Οπότε $x = 2$ ή $x = 4$. Άρα η $\varphi$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(0,2)$, $(2,4)$ και $(4,+\infty)$. Αλλά: $\varphi(1) > 0, \varphi(3) < 0$ και $\varphi(5) > 0$, επομένως συμπεραίνουμε ότι:

$\varphi(x) < 0$ για κάθε $x \in (2,4)$, δηλαδή $\varphi(x) \le 0$, για $x \in [2,4]$. Άρα: $2^x \le x^2$ για $x > 0$.

**Δ4.** Αρχικά βρίκουμε τις ρίζες της εξίσωσης $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(e^x) = 0$ ή $x = 1 \notin (-\ln 2, 0)$

$\Leftrightarrow e^x = x_0 \Leftrightarrow x = \ln x_0$. Είναι:

$$E = \int_{-\ln 2}^{0} |g(x)|dx = \int_{-\ln 2}^{\ln x_0} |g(x)|dx + \int_{\ln x_0}^{0} |g(x)|dx = I_1 + I_2\,, \qquad (1)$$

Για κάθε $-\ln 2 \le x \le \ln x_0 \Leftrightarrow e^{-\ln 2} \le e^x \le e^{\ln x_0} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le e^x \le x_0$

$\overset{f\uparrow(0,e]}{\Longleftrightarrow} f\left(\frac{1}{2}\right) \le f(e^x) \le f(x_0)$

$\Leftrightarrow f(e^x) \le 0.$

Επομένως, $g(x) = f(e^x)\cdot\frac{1-x}{2} \le 0$ και για το ολοκλήρωμα $I_1$ έχουμε:

$$I_1 = \int_{-\ln 2}^{\ln x_0} |g(x)|dx = -\int_{-\ln 2}^{\ln x_0} g(x)dx = -\int_{-\ln 2}^{\ln x_0} f(e^x)\cdot\left(\frac{1-x}{2}\right)dx\,, \qquad (2)$$

Θέτουμε: $u = e^x \Leftrightarrow x = \ln u$, οπότε $du = (e^x)'dx \Leftrightarrow du = u\,dx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{u}\,du$.

Για $x_1 = -\ln 2$ είναι $u_1 = e^{\ln 1/2} = \frac{1}{2}$, ενώ για $x_2 = \ln x_0$ είναι $u_2 = e^{\ln x_0} = x_0$

Οπότε:

$$I_1 = -\int_{\frac{1}{2}}^{x_0} f(u)\cdot\left(\frac{1-\ln u}{u^2}\right)du = -\int_{\frac{1}{2}}^{x_0} f(u)\cdot f'(u)\,du = -\frac{1}{2}\,[f^2(u)]_{\frac{1}{2}}^{x_0}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[f^2(x_0) - f^2\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}f^2\left(\frac{1}{2}\right)$$

Αντίστοιχα, για κάθε

$\ln x_0 \leq x \leq 0 \Leftrightarrow e^{\ln x_0} \leq e^x \leq e^0 \Leftrightarrow x_0 \leq e^x \leq 1 \overset{f\uparrow(0,e]}{\Longleftrightarrow} f(x_0) \leq f(e^x) \leq f(1)$
$\Leftrightarrow 0 \leq f(e^x)$.

Επομένως, $g(x) = f(e^x) \cdot \frac{1-x}{2} \geq 0$ και για το ολοκλήρωμα $I_2$ έχουμε:

$$I_2 = \int_{\ln x_0}^{0} g(x)dx = \int_{\ln x_0}^{0} f(e^x)\frac{1-x}{e^x}dx$$

Θέτουμε $u = e^x \Leftrightarrow x = \ln u$, οπότε: $du = (e^x)'dx = e^x dx = u dx$. Άρα: $dx = \frac{1}{u}du$

Όταν $x_1 = \ln x_0$ είναι $u_1 = x_0$ και όταν $x_2 = 0$ είναι: $u_2 = 1$, οπότε έχουμε:

$$I_2 = \int_{x_0}^{1} f(u)\frac{\ln u}{u^2}du = \int_{x_0}^{1} f(u)f'(u)du = \frac{1}{2}[f^2(u)]_{x_0}^{1} = \frac{1}{2}[f^2(1) - f^2(x_0)] = \frac{1}{2}f^2(1)$$

Τελικά:

$$E = I_1 + I_2 = \frac{1}{2}f^2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}f^2(1) = \frac{1}{2}[(1 - 2\ln 2 + 4\ln^2 2 + 1) = 1 - 2\ln 2 + 2\ln^2 2 \ \tau.\mu.$$

***Επιμέλεια:***

*Βαγγέλης Ράλλης, Γιάννης Μερτίκας, Δημήτρης Βλάχος, Γιάννης Αλεξόπουλος, Μάριος Παπαδιαμαντής, Γιάννης Παπαβασιλείου, Νίκος Αλεξόπουλος, Κωνσταντίνα Μωραΐτη, Αποστόλης Κωτσιαρίνης, Θανάσης Παρασκευόπουλος, Δημήτρης Γαληνός, Ηρώ Μαρκάκη*

***Ευχόμαστε καλά αποτελέσματα!***