

ΘΕΜΑ Α

A1. **β**

A2. **γ**

A3. **α**

A4. **α**

A5.

α. **Σωστό**

β. **Λάθος**

γ. **Λάθος**

δ. **Λάθος**

ε. **Σωστό**

ΘΕΜΑ Β

B1. Για το έμβολο (1) ισχύει:

$$\Sigma F_1 = 0 \Rightarrow F_{\alpha\tau\mu} - F_A + F = 0$$

$$\Rightarrow F_A = F + F_{\alpha\tau\mu} \Rightarrow \frac{F_A}{A_1} = \frac{F + F_{\alpha\tau\mu}}{A_1}$$

$$\Rightarrow P_A = \frac{F}{A_1} + P_{\alpha\tau\mu} \quad (1)$$

Αντίστοιχα, για το έμβολο (2) ισχύει:

$$\Sigma F_2 = 0 \Rightarrow F_{\alpha\tau\mu} + w - F_\Gamma = 0 \Rightarrow F_\Gamma$$

$$= F_{\alpha\tau\mu} + w \Rightarrow \frac{F_\Gamma}{A_2} = \frac{w + F_{\alpha\tau\mu}}{A_2} \Rightarrow P_\Gamma$$

$$= \frac{w}{A_2} + P_{\alpha\tau\mu} \quad (2)$$

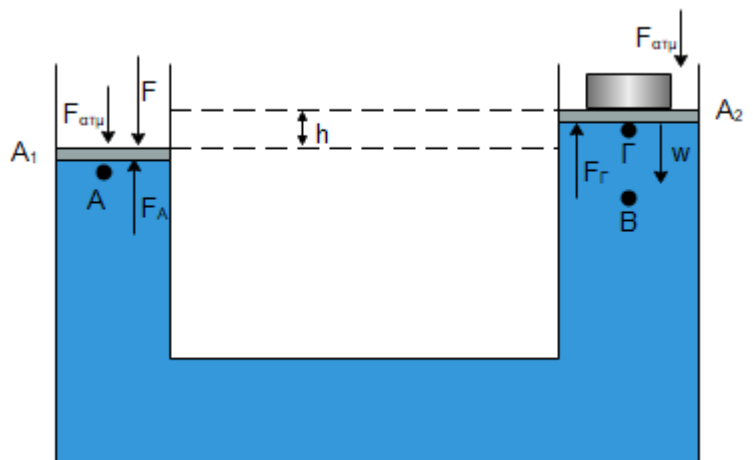
Εφαρμόζουμε υδροστατική εξίσωση για τα σημεία (Γ) και (B):

$$P_B = P_\Gamma + \rho g h, \text{ με } P_B = P_A$$

Οπότε από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{F}{A_1} + P_{\alpha\tau\mu} = \frac{w}{A_2} + P_{\alpha\tau\mu} + \rho g h \Rightarrow \frac{F}{A_1} = \frac{w + \rho g h A_2}{A_2}$$

Σωστή απάντηση: **ii.**



ΜΕΘΟΔΙΚΟ

B2. Αρχικά είναι: $(ΠΒΣ) - (ΠΑΣ) = Nλ$
 $2d + 2x_1 + πr - 2d_1 - πr = Nλ, \quad (1)$

Μετά: $(ΠΒ'Σ) - (ΠΑΣ) = (2N + 1) \frac{λ}{2}$
 $2λ + 2x_1 + 0,08 - 2d_1 - πr$
 $= (2N + 1) \frac{λ}{2}, \quad (2)$

Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε:

$$(2) - (1) \Rightarrow 0,08 = 2N \frac{λ}{2} + \frac{λ}{2} - Nλ$$
$$\Rightarrow λ = 0,16 \text{ m}$$

B3. Είναι: $Π_1 = \frac{K_2^{(τελ)}}{K_1^{(αρχ)}} = \frac{\frac{1}{2}m_2v_2'^2}{\frac{1}{2}m_1v_1^2} \quad (1)$ με $v_2' = \frac{2m_1v_1}{m_1+m_2} \Rightarrow \frac{v_2'}{v_1} = \frac{2m_1}{m_1+m_2} \quad (2),$

όπως προκύπτει από τους τύπους για την ελαστική κρούση.

Η (2) με τη βοήθεια της (1) γίνεται:

$$Π_1 = \frac{m_2 \left(\frac{v_2'}{v_1} \right)^2}{m_1} = \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{4 \cdot m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} \quad (3)$$

Είναι σύμφωνα με όσα γνωρίζουμε για την ελαστική κρούση:

$$v_1' = \frac{2m_2v_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \frac{v_1'}{v_2} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \quad (4)$$

Η (3) με τη βοήθεια της (4) γίνεται:

$$Π_2 = \frac{K_1^{(TEA)}}{K_2^{(APX)}} = \frac{\frac{1}{2}m_1v_1'^2}{\frac{1}{2}m_2v_2^2} = \frac{m_1}{m_2} \left(\frac{v_1'}{v_2} \right)^2 = \frac{m_1}{m_2} \cdot \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} \quad (5)$$

Από τις σχέσεις (3) και (5) συμπεραίνουμε ότι $Π_1 = Π_2$.

Σωστή απάντηση είναι το **ii**.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

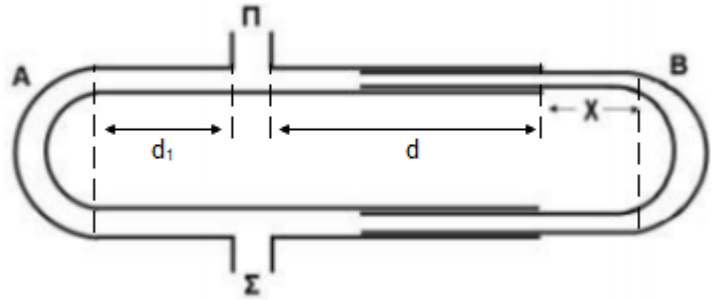
Για την ελεύθερη πτώση του Σ_2 εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε.:

$$\frac{1}{2}m_2v_2^2 - 0 = m_2gh \Rightarrow v_2^2 = 2gh \Rightarrow v_2 = 2\sqrt{3} \frac{m}{s}$$

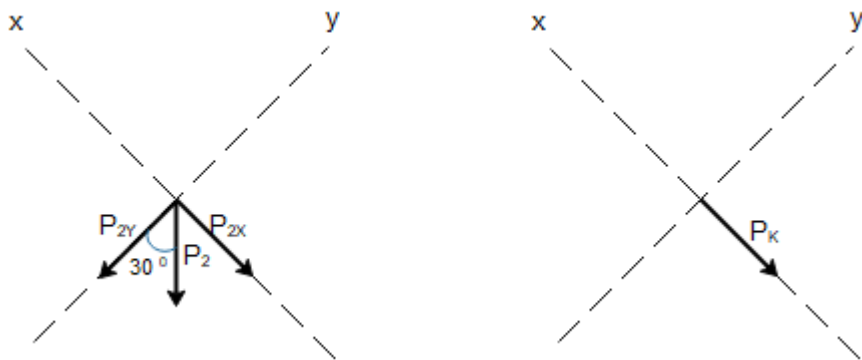
Εφαρμόζουμε Α.Δ.Ο. στο xOx' (άξονας παράλληλος στο κεκλιμένο επίπεδο)

$$P_{2x} = P_K \Rightarrow P_2 \cdot \eta\mu 30 = (m_1 + m_2)v_K \Rightarrow m_2v_2 \cdot \eta\mu 30 = (m_1 + m_2)v_K$$

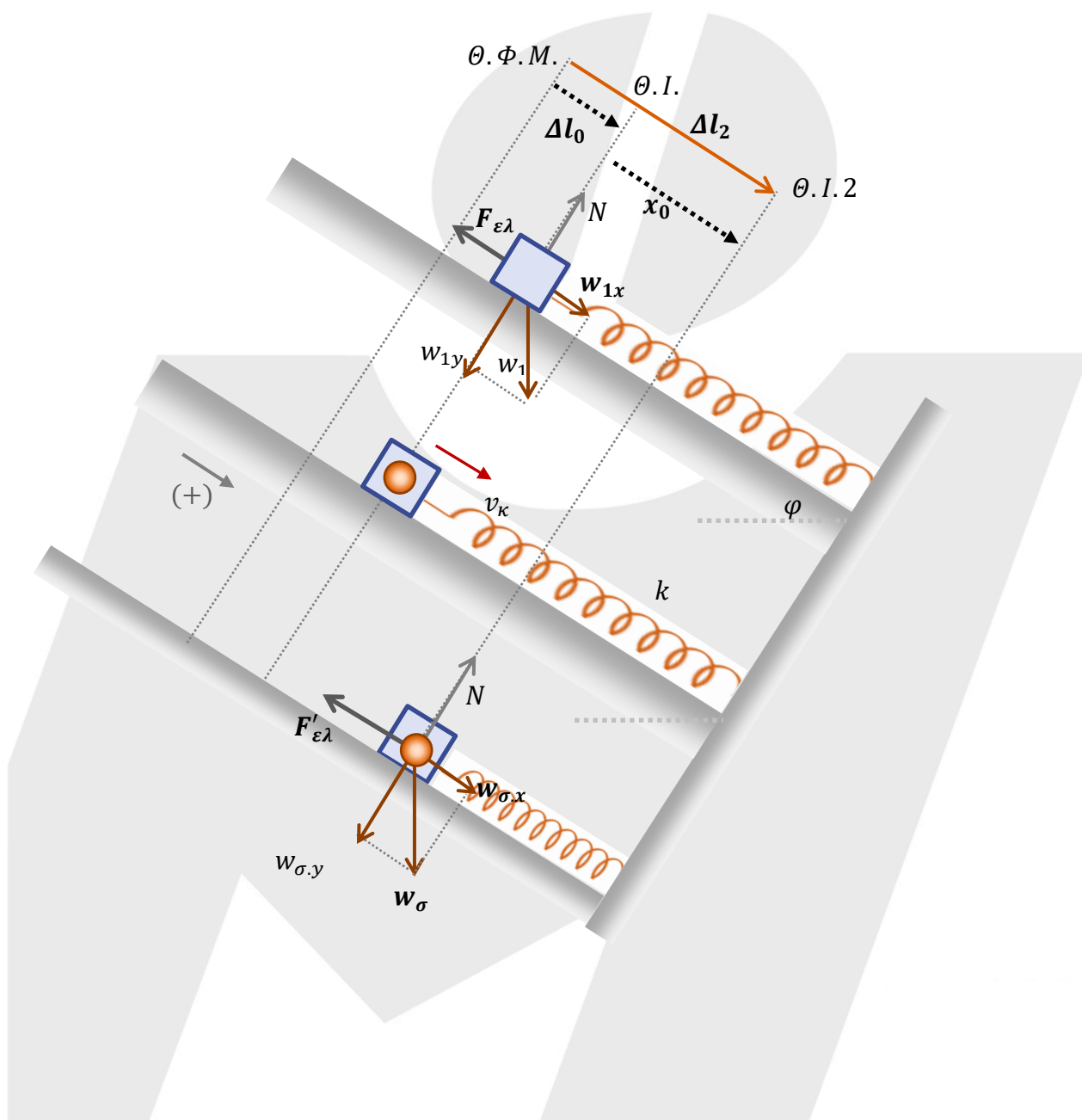
$$\Rightarrow v_K = \frac{3\sqrt{3}}{4} m/s$$



ΜΕΘΟΔΙΚΟ



Γ2.



Μεθοδικό Φροντιστήριο

Βουλιαγμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999

Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300

Ελ. Βενιζέλου 45 Ν.Σμύρνη, Τηλ: 210 93 10 320

www.methodiko.net

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Ισορροπία σώματος Σ_1 στην θI_1 :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow m_1 g \cdot \eta\mu\varphi = k \cdot \Delta l_0 \Rightarrow \Delta l_0 = \frac{m_1 g \cdot \eta\mu\varphi}{k} \Rightarrow \Delta l_0 = \frac{10 \cdot \frac{1}{2}}{100} = \frac{5}{100} = 5 \cdot 10^{-2} m$$

Ισορροπία συσσωματώματος στην θI_2 :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2) g \eta\mu\varphi = k \cdot \Delta l_2$$

$$\Delta l_2 = \frac{(m_1 + m_2) g \eta\mu\varphi}{k} \Rightarrow \Delta l_2 = \frac{40 \cdot \frac{1}{2}}{100} = \frac{20}{100} = 20 \cdot 10^{-2} m.$$

Η αρχική απομάκρυνση του συσσωματώματος από την θI_2 είναι:

$$x_0 = -(\Delta l_2 - \Delta l_0) = -15 \cdot 10^{-2} m.$$

Εφαρμόζουμε Α.Δ.Ε για την ταλάντωση του συσσωματώματος.

$$E_T = K_T + U_T \Rightarrow \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} D x_0^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_K^2$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{m_1 + m_2}{D} \cdot v_K^2} = \sqrt{(15 \cdot 10^{-2})^2 + \frac{4}{100} \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{45}\right)^2} = \sqrt{(15 \cdot 10^{-2})^2 + \frac{4}{100} \cdot \frac{9 \cdot 3}{16}}$$
$$= \sqrt{15^2 \cdot 10^{-4} + \frac{27}{100}} = \sqrt{0,09} = 0,3 m.$$

Γ3.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ έχουμε $x = -0,15 m$ με $u_K > 0$. Μέσω του περιστρεφόμενου διανύσματος προκύπτει:

$$\eta\mu\theta = \frac{0,15}{0,30} = \frac{1}{2} \text{ επομένως } \theta = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

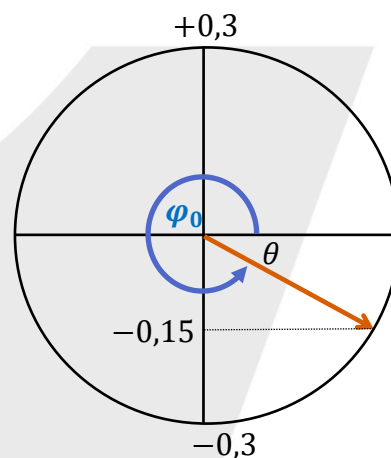
Άρα για την αρχική φάση προκύπτει:

$$\varphi_0 = 2\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{11\pi}{6} \text{ rad}$$

Η γωνιακή συχνότητα της απλής αρμονικής ταλάντωσης είναι:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{100}{4}} = 5 \text{ rad/s.}$$

$$\text{Οπότε } x = 0,3 \eta\mu\left(5t + \frac{11\pi}{6}\right)$$



Γ4.

Στη θέση όπου $K = 8U$ ισχύει:

$$K + U = E \Leftrightarrow 9U = E \Leftrightarrow \frac{1}{2} D x^2 = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} A^2 \Leftrightarrow x = \pm \frac{A}{3} = \pm 0,1 m$$

Το συσσωμάτωμα τη δεύτερη φορά που $K = 8U$ περνά από τη θέση $x = +0,1 m$. Σε εκείνη τη θέση ισχύει:

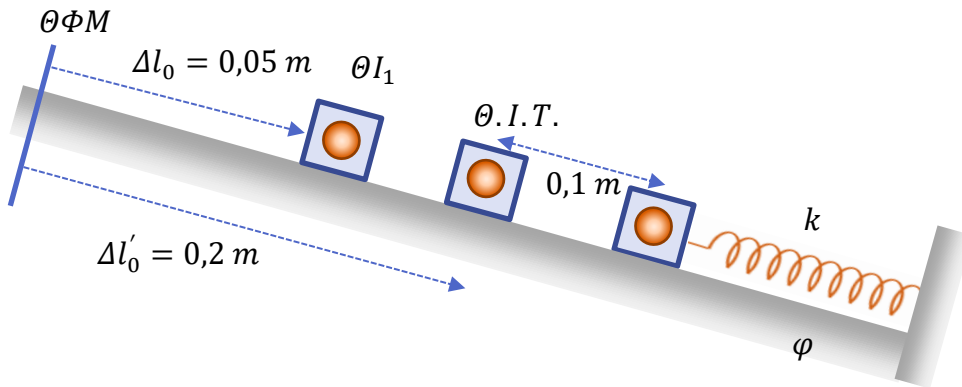
$$\frac{|F_{ελ}|}{|\Sigma F|} = \frac{k(0,2 + 0,1)}{k \cdot 0,1} = 3$$

Μεθοδικό Φροντιστήριο

Βουλιαγμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999

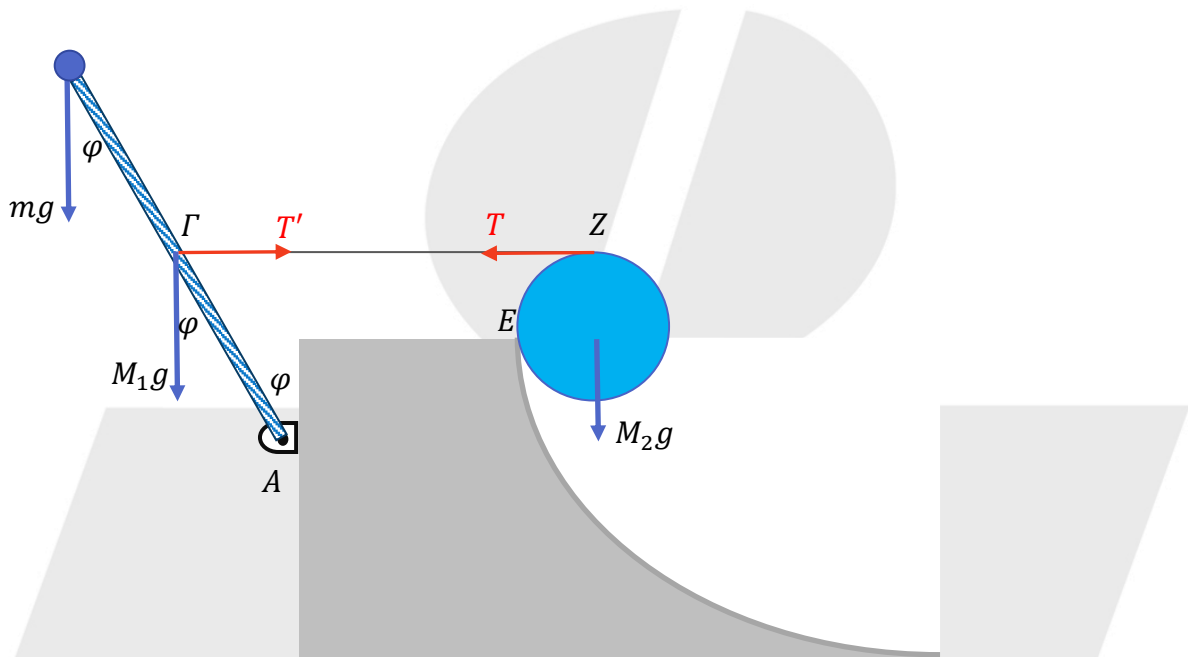
Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300

Ελ. Βενιζέλου 45 Ν.Σμύρνη, Τηλ: 210 93 10 320



ΘΕΜΑ Δ

Δ1.



Από την ισορροπία του δίσκου έχουμε:

$$(\Sigma \vec{\tau})_E = 0 \Rightarrow M_2 g \cdot R - T \cdot R = 0 \Rightarrow T = M_2 g \quad (1)$$

Από την ισορροπία της ράβδου έχουμε:

$$(\Sigma \vec{\tau})_A = 0 \Rightarrow mgl \eta\mu\phi + M_1 g \frac{l}{2} \eta\mu\phi - T \frac{l}{2} \sigma\upsilon\nu\phi = 0$$

$$\Rightarrow 10 \cdot 0,6 + 30 \cdot 0,6 = \frac{T}{2} \cdot 0,8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 + 18 = T \cdot 0,4 \Rightarrow \frac{24}{0,4} = T \Rightarrow T = 60N.$$

$$(1) \Rightarrow M_2 = 6 \text{ kg}.$$

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Δ2.

Η ροπή αδράνειας του στερεού είναι:

$$I = \frac{1}{3} M_1 L^2 + mL^2 = \frac{1}{3} 6 \cdot 1 + 1 = 3 \text{ kg m}^2$$

Αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος είναι:

$$\begin{aligned} (\Sigma \vec{2})_A = I \alpha_\gamma &\Rightarrow M_1 g \frac{L}{2} \eta \mu \varphi + mgL \eta \mu \varphi = I \alpha_\gamma \\ \Rightarrow 30 \cdot 0,6 + 10 \cdot 0,6 &= 3 \alpha_\gamma \Rightarrow 18 + 6 = 3 \alpha_\gamma \\ \Rightarrow \frac{24}{3} = \alpha_\gamma &\Rightarrow 8 \frac{r}{s^2} = \alpha_\gamma. \end{aligned}$$

Δ3. Είναι $L = I \omega$.

Στην αρχική θέση είναι $\omega = 0 \Rightarrow L_{\alpha\rho\chi} = 0$

Για να βρούμε την γωνιακή ταχύτητα στην οριζόντια θέση εφαρμόζουμε ΘΜΚΕ μεταξύ της αρχικής και της οριζόντιας θέσης.

$$\frac{1}{2} I \omega^2 - 0 = M_1 g h_1 + mg h_2$$

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \omega^2 = 60 \cdot \frac{l}{2} \sigma \nu \nu \varphi + 10 l \sigma \nu \nu \varphi$$

$$\frac{3}{2} \omega^2 = 30 \cdot 0,8 + 10 \cdot 0,8 \Rightarrow \frac{3}{2} \omega^2 = 32 \Rightarrow \omega^2 = \frac{64}{3} \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ r/s}$$

$$\text{Άρα: } |\Delta L| = |L_{TE\Lambda} - L_{\alpha\rho\chi}| = I \omega = 3 \frac{8\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3} \text{ kg m}^2/\text{s}$$

Το διάνυσμα της μεταβολής της στροφορμής είναι κάθετο στο επίπεδο κίνησης του στερεού με κατεύθυνση προς τον αναγνώστη.

Δ4.

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για την κίνηση του δίσκου:

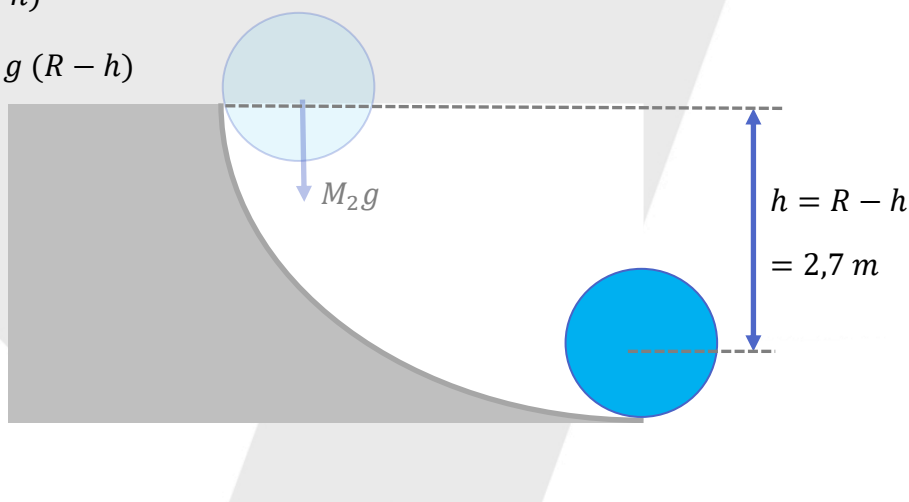
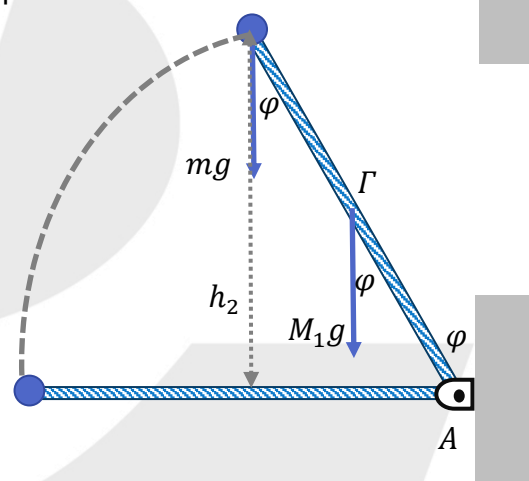
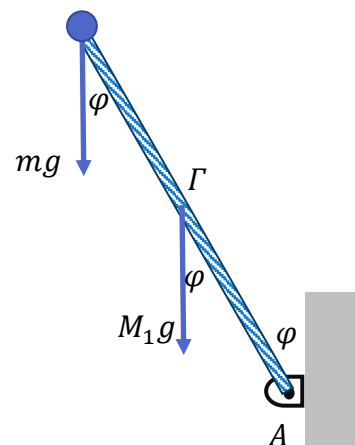
$$\frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} M_2 v^2 = M_2 g (R - h)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M_2 R^2 \omega^2 + \frac{1}{2} M_2 v^2 = M_2 g (R - h)$$

$$\frac{3}{4} v^2 = 10 \cdot 2,7$$

$$\Rightarrow v^2 = 36$$

$$\Rightarrow v = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Μεθοδικό Φροντιστήριο

Βουλιαγμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999

Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300

Ελ. Βενιζέλου 45 Ν.Σμύρνη, Τηλ: 210 93 10 320

www.methodiko.net

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Δ5. i. Το τεταρτοκύκλιο έχει συνολικό μήκος $\frac{2\pi R}{4} = \frac{2\pi \cdot 2,8}{4} = 1,4\pi \text{ m}$

ενώ το μήκος της περιφέρειας του δίσκου είναι: $L = 2\pi r = 0,2\pi \text{ m}$

Άρα, ο αριθμός των περιστροφών είναι $N = \frac{1,4}{0,2\pi} = 7$ περιστροφές.

ii. Η κύλιση στο οριζόντιο δάπεδο γίνεται με σταθερή ταχύτητα $v = 6 \text{ m/s}$.

Η μετατόπιση του κέντρου μάζας έχει μήκος ίσο με το μήκος του διαγραφόμενου τόξου.

Άρα, έχουμε:

$$N = \frac{\pi}{0,2\pi} = 5 \text{ περιστροφές}$$

Επιμέλεια:

Χαρίλαος Τσαγκαράκης, Στέφανος Μαυρογιώργης, Αντώνης Παρασκευάς, Ιωάννης Τριανταφύλλου

Ευχόμαστε καλά αποτελέσματα!

Μεθοδικό Φροντιστήριο

Βουλιαγμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999

Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300

Ελ. Βενιζέλου 45 Ν.Σμύρνη, Τηλ: 210 93 10 320

www.methodiko.net