

Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά Προσανατολισμού,**

**Θετικών & Οικονομικών Σπουδών**

Ημερομηνία: 10 Ιουνίου 2019

Ενδεικτικές Απαντήσεις Θεμάτων

## Θέμα Α

A1.

α) Σχολικό βιβλίο, **σελίδα 15** (υπονοείται  $A \neq \emptyset$ )

β)

i) Σχολικό βιβλίο, **σελίδα 35**

ii) Σχολικό βιβλίο, **σελίδα 35-36**

A2. Σχολικό βιβλίο, **σελίδα 142**

A3. Σχολικό βιβλίο, **σελίδα 135**

A4.

α) **Λάθος.**

Αντιπαράδειγμα:

Σχολικό βιβλίο, **σελίδα 134**

β) **Λάθος.**

Αντιπαράδειγμα:

Σχολικό βιβλίο, **σελίδα 71**

A5. Σχολικό βιβλίο, **σελίδα 239.**

Η σωστή απάντηση είναι η **γ**.

## Θέμα Β

B1. Αφού η ευθεία  $y = 2$  είναι η οριζόντια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$  τότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{-x} + \lambda] = 2 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

B2. Έστω η συνάρτηση:  $h(x) = f(x) - x, x \in [2,3]$ .

Η  $h$  είναι συνεχής στο  $[2,3]$  και παραγωγίσιμη στο  $(2,3)$ , με  $h'(x) = (e^{-x} + 2 - x)'$   
 $\Leftrightarrow h'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$ , για κάθε  $x \in (2,3)$ . Η  $h$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[2,3]$  ως  
συνεχής συνάρτηση.

$$\text{Έχουμε: } h(2) = \frac{1}{e^2} > 0 \text{ και } h(3) = \frac{1}{e^3} - 1 = \frac{1-e^3}{e^3} < 0$$

Επομένως, αφού η  $h$  είναι συνεχής στο  $[2,3]$  και  $h(2)h(3) < 0$ , με εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano για την  $h$  στο  $[2,3]$ , υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in (2,3)$ , τέτοιο ώστε:

Μεθοδικό Φροντιστήριο

Βουλιαγμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999

Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300

Ελ. Βενιζέλου 45 Ν.Σμύρνη, Τηλ: 210 93 10 320

[www.methodiko.net](http://www.methodiko.net)

# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

$h(x_0) = 0$  και αφού η  $h$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[2,3]$ , η εξίσωση  $h(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα την  $x = x_0$ .

**B3.** Η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  και παραγωγίσιμη με  $f'(x) = -e^{-x} < 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$  και αφού είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  έχει σύνολο τιμών το διάστημα:  $f(\mathbb{R}) = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (2, +\infty)$

Επομένως, η  $f$  είναι συνάρτηση με την ιδιότητα  $1 - 1$ , άρα και αντιστρέψιμη.

Η  $f^{-1}$  έχει πεδίο ορισμού το  $f(\mathbb{R}) = (2, +\infty)$ .

Για να βρούμε την αντίστροφη της  $f$  θέτουμε  $y = f(x)$  και λύνουμε ως προς  $x$ . Έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow e^{-x} + 2 = y, \text{ με } y > 2$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} = y - 2, y > 2$$

$$\Leftrightarrow -x = \ln(y - 2), y > 2$$

$$\Leftrightarrow x = -\ln(y - 2), y > 2$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = -\ln(y - 2), y > 2$$

Επομένως:  $f^{-1}(x) = -\ln(x - 2), x > 2$

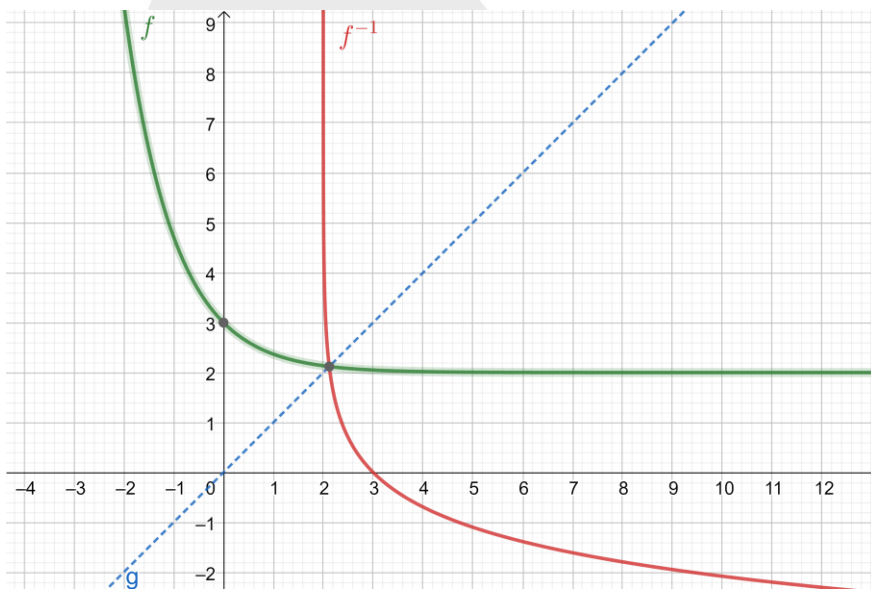
**B4.** Έχουμε:  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} [-\ln(x - 2)]$

και θέτοντας  $u = x - 2$ , είναι  $u_0 = \lim_{x \rightarrow 2^+} u = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0$

άρα προκύπτει:  $\lim_{u \rightarrow 0^+} [-\ln u] = +\infty$

Τελικά, η ευθεία  $x = 2$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της  $C_f$ .

Για τις γραφικές παραστάσεις των  $f, f^{-1}$  προκύπτει το ακόλουθο σχήμα:



(Γνωρίζουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των  $f$  και  $f^{-1}$  έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία  $y = x$ )

Μεθοδικό Φροντιστήριο

Βουλιαγμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999

Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300

Ελ. Βενιζέλου 45 Ν.Σμύρνη, Τηλ: 210 93 10 320

[www.methodiko.net](http://www.methodiko.net)

# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

## Θέμα Γ

Γ1. Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο  $\mathbb{R}$ , επομένως και στο  $x_0 = 1$

Άρα, είναι και συνεχής στο σημείο αυτό, συνεπώς έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^{x-1} + \beta x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + a) = 1 + a$$

$$\Leftrightarrow 1 + \beta = 1 + a \Leftrightarrow a = \beta \quad (1) \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - (1 + a)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + a - (1 + a)}{x - 1}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - 1 - \beta}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + a - 1 - a}{x - 1} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta - 1}{1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \Leftrightarrow 1 + \beta = 2 \Leftrightarrow \beta = 1$$

με χρήση του κανόνα DLH για την περίπτωση  $\frac{0}{0}$ .

Από την (1) προκύπτει:  $a = 1$ .

Γ2. Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(-\infty, 1)$  με  $f'(x) = e^{x-1} + 1 > 0$  για κάθε  $x < 1$ .

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(1, +\infty)$  με  $f'(x) = 2x > 0$ , για κάθε  $x > 1$ .

Επίσης:  $f'(1) = 2 > 0$ . Άρα η  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  συνεπώς η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  και συνεχής άρα έχει σύνολο τιμών

$$f(\mathbb{R}) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1} + x), \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R},$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-1} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty.$$

## Γ3.

i) Η  $f$  έχει σύνολο τιμών το  $\mathbb{R}$  που περιέχει το μηδέν και είναι γνησίως μονότονη στο  $\mathbb{R}$ , άρα, υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in \mathbb{R}$ :  $f(x_0) = 0$  και  $f(0) = \frac{1}{e}$ .

$$\text{Ισχύει } \frac{1}{e} > 0 \Leftrightarrow f(0) > f(x_0) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} 0 > x_0$$

ii) (α' τρόπος)

Έστω ότι η εξίσωση  $f^2(x) - x_0 f(x) = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα  $\rho \in (x_0, +\infty)$ .

$$\text{Τότε ισχύει: } f^2(\rho) - x_0 f(\rho) = 0 \Leftrightarrow f(\rho) \cdot [f(\rho) - x_0] = 0$$

$$\Leftrightarrow f(\rho) = 0 \text{ ή } f(\rho) - x_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow f(\rho) = f(x_0) \text{ ή } f(\rho) = x_0.$$

Επειδή η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , συνεπώς και  $1 - 1$ , η ισότητα  $f(\rho) = f(x_0)$  οδηγεί στην  $\rho = x_0$ , το οποίο είναι άτοπο, αφού  $\rho > x_0$

Αφού  $x_0 < 0$ , η ισότητα  $f(\rho) = x_0$  οδηγεί στην ανισότητα  $f(\rho) < 0 \Leftrightarrow f(\rho) < f(x_0) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} \rho < x_0$ , το οποίο είναι άτοπο, αφού  $\rho > x_0$

(β' τρόπος)

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = f^2(x) - x_0 f(x)$ , με  $x \in [x_0, +\infty)$ .

Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον  $\rho \in (x_0, +\infty)$  τέτοιο, ώστε  $g(\rho) = 0$ .

- Η  $g$  είναι συνεχής στο  $[x_0, \rho]$
- Η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(x_0, \rho)$ , με  $g'(x) = 2f(x)f'(x) - x_0 f'(x)$

## Μεθοδικό Φροντιστήριο

Βουλαγαμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999

Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300

Ελ. Βενιζέλου 45 Ν.Σμύρνη, Τηλ: 210 93 10 320

[www.methodiko.net](http://www.methodiko.net)

# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

- $g(x_0) = f^2(x_0) - x_0 f(x_0) = 0$  και  $g(\rho) = 0$ , άρα  $g(x_0) = g(\rho)$ .

Από Θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (x_0, \rho)$ :

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2f(\xi)f'(\xi) - x_0 f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)[2f(\xi) - x_0] = 0$$

και επειδή  $f'(\xi) > 0$ :

$$2f(\xi) - x_0 = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{x_0}{2}$$

άτοπο, διότι  $\frac{x_0}{2} < 0$  και  $f(\xi) > 0$ , αφού  $x_0 < \xi < \rho \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(x_0) < f(\xi) \Leftrightarrow f(\xi) > 0$ .

(γ' τρόπος)

$$\text{Έχουμε ότι: } f^2(x) - x_0 f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)[f(x) - x_0] = 0 \quad (1)$$

Αλλά για κάθε  $x > x_0 \stackrel{f \uparrow}{\Rightarrow} f(x) > f(x_0) \Rightarrow f(x) > 0$  και  $f(x) > 0 > x_0$ . Άρα  $f(x) > 0$  και  $f(x) - x_0 > 0$  οπότε  $f(x)[f(x) - x_0] > 0$ . Άρα η εξίσωση (1) είναι αδύνατη στο  $(x_0, +\infty)$ .

**Γ4.** Έστω  $M(x(t), y(t))$  η θέση του σημείου  $M$  κάθε χρονική στιγμή  $t \geq 0$  με

$x(t) \geq 1$  για κάθε  $t \geq 0$ . Ισχύει  $x(t_0) = 3, y(t_0) = 10, x'(t) = 2$  μον/sec για κάθε  $t \geq 0$ .

Επειδή  $M \in C_f$ , ισχύει  $y(t) = x^2(t) + 1$  για κάθε  $t \geq 0$ .

Παραγωγίζοντας παίρνουμε  $y'(t) = 2x(t)x'(t) \Leftrightarrow y'(t) = 4x(t)$  για κάθε  $t \geq 0$ .

Ισχύει  $E(t) = \frac{x(t)y(t)}{2}$  για κάθε  $t \geq 0$ , αφού  $x(t), y(t) \geq 1 > 0$  για κάθε  $t \geq 0$ .

Παραγωγίζοντας παίρνουμε:

$$E'(t) = \frac{1}{2}[x'(t)y(t) + y'(t)x(t)] = \frac{1}{2}[2y(t) + 4x^2(t)] = y(t) + 2x^2(t)$$

για κάθε  $t \geq 0$ .

Για  $t = t_0$  δίνει:  $E'(t_0) = y(t_0) + 2x^2(t_0) = 10 + 2 \cdot 9 = 28$  τ. μ /s.

## Θέμα Δ

**Δ1.** Έχουμε:  $f(x) = (x - 1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) + \alpha x + \beta, x \in \mathbb{R}$

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  η  $f$  είναι παραγωγίσιμη με:  $f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2} + \alpha$

Ισχύουν τα εξής:  $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f'(1) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = -1 \end{cases}$

**Δ2.** Για  $\alpha = -1, \beta = 2$ , έχουμε:  $f(x) = (x - 1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2$ .

Ισχύει:  $E = \int_1^2 |f(x) - (-x + 2)| dx \quad (1)$

Για κάθε  $x \in [1, 2]$ , ισχύει:

$$f(x) - (-x + 2) = (x - 1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) = (x - 1) \cdot \ln[(x - 1)^2 + 1] \geq 0,$$

αφού  $(x - 1)^2 + 1 \geq 1$ . Οπότε, η (1) γίνεται:

$$E = \int_1^2 [f(x) - (-x + 2)] dx = \int_1^2 (x - 1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) dx$$

Θέτουμε:  $x^2 - 2x + 2 = u$ , οπότε:  $(2x - 2)dx = du$ .

Αν  $x = 1$ , τότε  $u = 1$  και αν  $x = 2$ , τότε  $u = 2$

$$\text{και } E = \frac{1}{2} \int_1^2 \ln u \, du = \frac{1}{2} \int_1^2 (u \cdot \ln u - u)' \, du = \frac{1}{2} [u \cdot \ln u - u]_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2} \quad \tau. \mu.$$

$$\text{ή } E = \frac{1}{2} \int_1^2 (u)' \ln u \, du = \frac{1}{2} [u \ln u]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 u \cdot \frac{1}{u} \, du = \ln 2 - \frac{1}{2} \quad \tau. \mu.$$

Μεθοδικό Φροντιστήριο

Βουλιαγμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999

Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300

Ελ. Βενιζέλου 45 Ν.Σμύρνη, Τηλ: 210 93 10 320

[www.methodiko.net](http://www.methodiko.net)

# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Δ3.

i) Για  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2} - 1$  και άρα

$$f'(x) + 1 = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} = \ln[(x-1)^2 + 1] + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} \geq 0$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , γιατί  $(x-1)^2 + 1 \geq 1$  και  $\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1} \geq 0$

Οπότε:  $f'(x) \geq -1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

ii) (α' τρόπος)

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1) \cdot \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq (\lambda - 1) \cdot \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - \lambda + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq f(\lambda) - 2 + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda) \geq -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \geq -1, \quad (1)$$

Με εφαρμογή του θεωρήματος Μέσης Τιμής για τη συνάρτηση  $f$  στο διάστημα  $\left[\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right]$

εξασφαλίζουμε  $\xi \in \left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right)$  ώστε να ισχύει  $f'(\xi) = \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}}$  και άρα η (1) γράφεται

ισοδύναμα:  $f'(\xi) \geq -1$  που ισχύει από το ερώτημα Δ3 (i).

(β' τρόπος)

Έχουμε:

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1) \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2} \Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq f(\lambda) + \lambda - \frac{1}{2} \quad (\text{από την } f)$$

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda + \frac{1}{2} \geq f(\lambda) + \lambda \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h(x) = f(x) + x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Η  $h$  είναι παραγωγίσιμη, με  $h'(x) = f'(x) + 1 \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  (η ισότητα ισχύει μόνο για  $x = 1$ ).

Άρα η  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , οπότε:

$$(1) \Leftrightarrow h\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq h(\lambda) \stackrel{h \uparrow}{\Leftrightarrow} \lambda + \frac{1}{2} \geq \lambda \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$

Δ4.

(α' τρόπος)

$$g(x) = -x^3 - x + 2, x \in \mathbb{R}$$

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , η  $g$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με:  $g'(x) = -3x^2 - 1$  και  $g''(x) = -6x$ .

Λύνουμε:

- $g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $g''(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$

Μεθοδικό Φροντιστήριο

Βουλιαγμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999



Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300

Ελ. Βενιζέλου 45 Ν.Σμύρνη, Τηλ: 210 93 10 320

[www.methodiko.net](http://www.methodiko.net)

# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

- $g''(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	$0$	$-$
$g'$			

Η  $g'$  παρουσιάζει στο  $x = 0$  ολικό μέγιστο, άρα για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $g'(x) \leq g'(0) \Leftrightarrow g'(x) \leq -1$ , με την ισότητα να ισχύει για  $x = 0$ .

Γνωρίζουμε όμως ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:  $f'(x) \geq -1$ .

Αν υπάρχει κοινή εφαπτόμενη στην  $C_f, C_g$  τότε αυτή θα αναφέρεται σε σημείο της  $C_g$  με τετμημένη  $x_0 = 0$ . Οπότε η ευθεία αυτή έχει εξίσωση:  $y - g(0) = g'(0) \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y - 2 = -x \Leftrightarrow y = -x + 2$ , που είναι η κοινή εφαπτόμενη των δύο γραφικών παραστάσεων, αφού είναι και εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $A(1,2)$ .

*(β' τρόπος)*

Έστω  $(\varepsilon_1)$  εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $A(x_1, f(x_1))$  και  $(\varepsilon_2)$  της  $C_g$  στο σημείο  $B(x_2, f(x_2))$ . Τότε:  $(\varepsilon_1): y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y = f'(x_1) \cdot x + f(x_1) - x_1 \cdot f'(x_1)$   
 $(\varepsilon_2): y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = g'(x_2) \cdot x + g(x_2) - x_2 \cdot g'(x_2)$

Για να υπάρχει κοινή εφαπτομένη των  $C_f, C_g$  πρέπει:

$$\begin{cases} f'(x_1) = g'(x_2), & (1) \\ f(x_1) - x_1 \cdot f'(x_1) = g(x_2) - x_2 \cdot g'(x_2), & (2) \end{cases}$$

Αλλά:  $f'(x_1) \geq -1$ , για κάθε  $x_1 \in \mathbb{R}$  με την ισότητα να ισχύει μόνο για  $x_1 = 1$ , και  $g'(x_2) = -3x_2^2 - 1 \leq -1$  για κάθε  $x_2 \in \mathbb{R}$  με την ισότητα να ισχύει μόνο  $x_2 = 0$ .

Άρα, η (1) ισχύει μόνο για  $x_1 = 1$  και  $x_2 = 0$ .

Για  $x_1 = 1$  και για  $x_2 = 0$  ισχύει και η σχέση (2).

Οπότε η κοινή εφαπτομένη είναι:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = -(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 2.$$

## Επιμέλεια:

Βαγγέλης Ράλλης, Γιάννης Μερτίκας, Δημήτρης Βλάχος, Χρήστος Αναστασίου, Μάριος Παπαδιαμαντής, Αλέξανδρος Φιτσόπουλος, Αποστόλης Κωτσιαρίνης, Γιάννης Αλεξόπουλος, Δημήτρης Κότσιρας, Ιάσοντας Μαρκάκης, Νίκος Αλεξόπουλος, Ηρώ Μαρκάκη

## Ευχόμαστε καλά αποτελέσματα!



Για την εύστοχη Συμπλήρωση του Μηχανογραφικού Δελτίου συμβουλευτείτε τον Οδηγό Σπουδών από τις εκδόσεις μας: «ΣΠΟΥΔΕΣ & ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΑ».

Όλες οι απαραίτητες πληροφορίες για τις Σχολές, τις Σπουδές και τα Επαγγέλματα με βάση τις πρόσφατες αλλαγές στα Τμήματα και τις Σχολές της Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης!

Περισσότερες πληροφορίες στην ιστοσελίδα του ΜΕΘΟΔΙΚΟΥ: [www.methodiko.net](http://www.methodiko.net)

## Μεθοδικό Φροντιστήριο

Βουλαγαμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999  
Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300  
Ελ. Βενιζέλου 45 Ν.Σμύρνη, Τηλ: 210 93 10 320

[www.methodiko.net](http://www.methodiko.net)