<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u>

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

18 ΜΑΪΟΥ 2016

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικό βιβλίο, σελίδα 262.
Α2. Θεωρία σχολικό βιβλίο, σελίδα 141.
Α3. Θεωρία σχολικό βιβλίο, σελίδα 246.
Α4. α) Λ, β) →Σ , γ) →Λ , δ) Σ, ε) → Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ρητή.

$$f(x)=\left(\frac{x}{x^2+1}\right)'=\frac{\left(x^2\right)'\cdot\left(x^2+1\right)-x\cdot\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x\cdot\left(x^2+1\right)-2x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{2x^3+2x-2x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f΄		-	0	+	
f		↘		↗	
			Τοπ. Ελάχιστο f(0)=0		

Έτσι προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ ενώ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο 0, το $f(0)=0$.

B2. $$f''(x)=\left(\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right)'=\frac{(2x)'(x^2+1)^2-2x\left[(x^2+1)^2\right]}{(x^2+1)^4}=$$

$$=\frac{2(x^2+1)^2-2x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\frac{2(x^2+1)^2-8x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{(x^2+1)\left[2(x^2+1)-8x^2\right]}{(x^2+1)^4}=\frac{(x^2+1)\left(2x^2+2-8x^2\right)}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{(x^2+1)(2-6x^2)}{(x^2+1)^4}=\frac{2(x^2+1)(1-3x^2)}{(x^2+1)^4}=\frac{2(x^2+1)(1-\sqrt{3}x)(1+\sqrt{3}x)}{(x^2+1)^4}.$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ή } x=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$							

$$F(-\frac{\sqrt{3}}{3})=1/4 \qquad F(\frac{\sqrt{3}}{3})=1/4$$

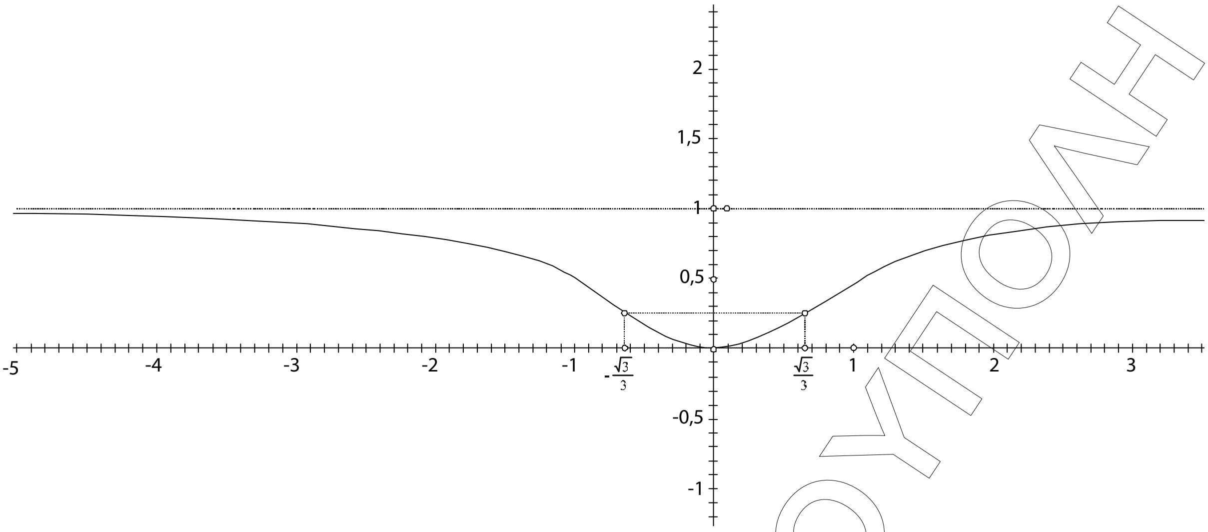
Προκύπτει ότι η f είναι κοίλη στα $(-\infty,\frac{\sqrt{3}}{3}][\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$, είναι κυρτή στο $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$,

ενώ παρουσιάζει Σ.Κ. στις θέσεις $x_1=-\frac{\sqrt{3}}{3}, x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

B3 $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2}=1.$$

Άρα η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=1$ και στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

B4



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $K(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$

$K(0)=e^0-1=0$

$K'(x)=2x\cdot e^{x^2}-2x=2x\left(e^{x^2}-1\right),\ x\in\mathbb{R}$

$K'(x)=0\Leftrightarrow x=0$.

Η συνάρτηση $g(x)=e^x$ είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ είναι:

$x^2>0\Leftrightarrow e^{x^2}>e^0\Leftrightarrow e^{x^2}>1\Leftrightarrow e^{x^2}-1>0$

Έτσι προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$2x$		-	0	+	
$e^{x^2}-1$		+	0	+	
$K'(x)$		-	0	+	
$K(x)$		↘	min=0	↗	

Άρα για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ είναι $K(x)>0$, ενώ $K(x)=0\Leftrightarrow x=0$. Δηλαδή η εξίσωση $K(x)=0$ έχει μοναδική λύση την $x=0$.

Γ2 Για $x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$: $f^2(x) = \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right) \neq 0$, λόγω του ερωτήματος Γ1.

Έτσι η f είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$ και δεν μηδενίζεται σε αυτά, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

- Για $x \in (0,+\infty)$: $\left(f(x) - \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)\right) \cdot \left(f(x) + \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)\right) = 0$ (1)

Αν $f(x) > 0$, τότε επειδή $e^{x^2} - x^2 - 1 > 0$, από την (1) προκύπτει ότι

$f(x) - \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$

Αν $f(x) < 0$, τότε επειδή το $-\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right) < 0$, από την (1) προκύπτει ότι

$f(x) + \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)$.

- Για $x \in (-\infty, 0)$

Αν $f(x) > 0$, τότε από την (1) $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$

Αν $f(x) < 0$, τότε από την (1) $f(x) = -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)$

Για $x = 0$ είναι $f(0) = 0$.

Έτσι προκύπτει ότι

α) $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1,\ x \in \mathbb{R}$ ή

β) $f(x) = -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right),\ x \in \mathbb{R}$ ή

γ) $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1, & x \geq 0 \\ -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right), & x < 0 \end{cases}$ ή

δ) $f(x) = \begin{cases} -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right), & x \geq 0 \\ e^{x^2} - x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

Γ3. $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1,\ x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 2xe^{x^2} - 2x = 2x\left(e^{x^2} - 1\right)$

$f''(x) = 2e^{x^2} + 2xe^{x^2} \cdot 2x - 2 = 2\left(e^{x^2} - 1\right) + 4x^2 \cdot e^{x^2}$

Προκύπτει ότι $f''(0) = 0$, ενώ επειδή στο ερώτημα Γ1, αποδείχθηκε ότι

$e^{x^2} - 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow \left(f'(x)\right)' > 0$ *στο* $\mathbb{R}^*$, ενώ

$f''(0) = 0$. Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα *στο* $\mathbb{R}$, άρα f κυρτή.

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x+3) - f(x),\ x \in \mathbb{R}$

Είναι $g'(x) = f'(x+3) - f'(x) = 3\dfrac{f'(x+3) - f'(x)}{(x+3) - x} = 3f''(\xi)$,

όπου $\xi \in (x,\ x+3)$.

Άρα $g'(x) > 0$, για κάθε $x \in [0,+\infty)$, λόγω του Γ3.

Η $g(x)$ επομένως είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, άρα και 1-1.

Η δοθείσα εξίσωση τώρα γράφεται $g(|\text{ημ}x|) = g(x)$.

Αφού είναι 1-1, προκύπτει ότι $|\text{ημ}x| = x,\ x \in [0,+\infty) \Leftrightarrow |\text{ημ}x| = |x|,\ x \in [0,+\infty)$.

Η ισότητα αυτή ισχύει μόνον όταν $x = 0$ (σχολικό βιβλίο σελ. 170).

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\int_0^\pi \left(f(x)+f''(x)\right)\cdot \eta\mu x\,dx = \pi \Rightarrow \int_0^\pi f(x)\cdot \eta\mu x\,dx + \int_0^\pi f''(x)\cdot \eta\mu x\,dx = \pi \Rightarrow$$

$$\int_0^\pi f(x)\cdot(-\sigma\upsilon\nu x)'\,dx + \int_0^\pi \left(f'(x)\right)'\cdot \eta\mu x\,dx = \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\left[\sigma\upsilon\nu x\cdot f(x)\right]_0^\pi + \int_0^\pi \sigma\upsilon\nu x\cdot f'(x)\,dx + \left[f'(x)\cdot \eta\mu x\right]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)\,\sigma\upsilon\nu x\,dx = \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\pi)+f(0)=\pi \quad (1)$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\cdot \eta\mu x\right) = 1\cdot 0 = 0$.

Αφού f συνεχής στο $x=0 \Rightarrow f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Δηλαδή $f(0)=0$.

Άρα από (1) $\Rightarrow f(\pi)=\pi$.

Έχουμε $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\cdot\dfrac{\eta\mu x}{x} = \dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{x}{\eta\mu x}}$, $x \neq 0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{x}{\eta\mu x}}\right) = 1\cdot\dfrac{1}{1} = 1$, άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 1$

Δηλαδή $f'(0)=1$.

Δ2 **α)** Από την σχέση $e^{f(x)} + x = f\left(f(x)\right) + e^x$ παραγωγίζοντας έχουμε

$e^{f(x)} f'(x) + 1 = f'\left(f(x)\right) f'(x) + e^x$ (2)΄

Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο σε κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε από Θ.

Fermat $f'(x_0) = 0$ (3)

Από (2) για $x = x_0$ έχουμε:

$e^{f(x_0)} f'(x_0) + 1 = f'\left(f(x_0)\right) f'(x_0) + e^{x_0} \Rightarrow e^{x_0} = 1 \Rightarrow x_0 = 0$.

Επομένως θα είναι $f'(0)=0$, άτοπο διότι $f'(0)=1$.
Άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

β) Αφού η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη θα είναι $f'(x)\neq 0$, $x\in\mathbb{R}$. Όμως η f' είναι συνεχής αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι
$f'(0)=1>0 \Rightarrow f'(x)>0,\ x\in\mathbb{R}$ δηλαδή η f είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Αφού f συνεχής και γνησίως αύξουσα θα έχει σύνολο τιμών το

$$f(R)=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right).$$

Όμως $f(R)=R \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$

Έχουμε $\left|\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right|=\dfrac{|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x|}{|f(x)|}\leq\dfrac{|\eta\mu x|+|\sigma\upsilon\nu x|}{|f(x)|}\leq\dfrac{2}{|f(x)|}$

και αφού f αύξουσα, για $x>0 \Rightarrow f(x)>f(0)\Rightarrow f(x)>0$.

Έτσι $\left|\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right|\leq\dfrac{2}{f(x)}\Leftrightarrow -\dfrac{2}{f(x)}\leq\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\leq\dfrac{2}{f(x)}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{f(x)}=0$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{2}{f(x)}=0$.

Άρα από κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=0$.

Δ4 Θέτω $\ln x=u\Rightarrow\dfrac{1}{x}\cdot dx=du$

Για $x=1\Rightarrow u_1=\ln 1=0$

Για $x=e^{\pi}\Rightarrow u_2=\ln e^{\pi}=\pi$

Έτσι $\displaystyle\int_1^{e^{\pi}}\frac{f(\ln x)}{x}dx=\int_0^{\pi} f(u)\,du$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\displaystyle 0<\int_0^{\pi} f(u)\,du<\pi^2$ (1)

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\pi]\Rightarrow f(0)\leq f(x)\leq f(\pi)$

(η ισότητα ισχύει μόνο για $x=\pi$ και για $x=0$)

$\Rightarrow f(x)\leq\pi\Rightarrow\pi-f(x)\geq 0$, $x\in[0,\pi]\Rightarrow$

$\displaystyle\Rightarrow\int_0^{\pi}\left(\pi-f(x)\right)dx>0$ (γιατί η $\pi-f(x)$ δεν μηδενίζεται παντού στο $[0,\pi]$) $\Rightarrow$

$\displaystyle\Rightarrow\int_0^{\pi}\pi\,dx-\int_0^{\pi}f(x)\,dx>0\Rightarrow\pi^2>\int_0^{\pi}f(x)\,dx$ (2)

Ομοίως $f(x) \geq f(0) = 0 \Rightarrow \int_0^{\pi} f(x)\,dx > 0$ (3)

Από (2), (3) $\Rightarrow 0 < \int_0^{\pi} f(x)\,dx < \pi^2$ δηλαδή ισχύει η (1).