ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
20 ΜΑΪΟΥ 2016
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 150.

Α2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 87.

Α3. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 14.

Α4. α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με

$$f'(x)=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+6x-1\right)'=3\cdot\frac{1}{3}\cdot x^2-\frac{5}{2}\cdot 2x+6=x^2-5x+6\,.$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\Leftrightarrow (x-2)\cdot\left(x-3\right)=0\Leftrightarrow x=2 \;\text{ ή }\; x=3\,.$$

Προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
f′		+	0	-	0	+	
f		↗		↘		↗	
			max		min		
			$f(2)=\frac{11}{3}$		$f(3)=\frac{7}{2}$		

Άρα η f παρουσιάζει:

α) στη θέση $x_1=2$ τοπικό μέγιστο $f\left(2\right)=\dfrac{11}{3}$.

β) στη θέση $x_2=3$ τοπικό ελάχιστο $f\left(3\right)=\dfrac{7}{2}$.

Β2. α’ τρόπος) Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο Α(0, f(0)) είναι:
$y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$.
Όμως $f(0)=-1$ και $f'(0)=6$.
Έτσι η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο Α είναι:
$y+1=6(x-0)\Leftrightarrow y=6x-1$.

β’ τρόπος) Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $\mathrm{A}\left(0, f(0)\right)$ είναι της μορφής:

$$y = \lambda x + \beta \text{, όπου } \lambda = f'\left(0\right).$$

Επειδή $f'\left(0\right) = 6$ η εξίσωση γράφεται $y = 6x + \beta$.

Επειδή $f\left(0\right) = -1$ το σημείο Α έχει συντεταγμένες (0, -1) και επειδή επαληθεύει την $y = 6x + \beta$ έχουμε: $-1 = 6 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = -1$.

Έτσι προκύπτει τελικά ότι η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y = 6x - 1$.

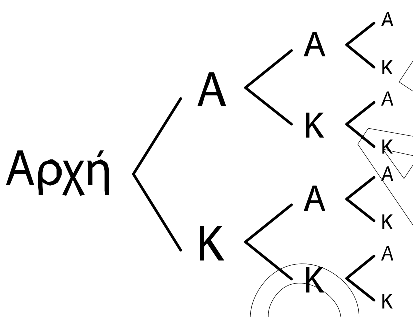
Β3. Είναι

$$\lim_{x\to-1}\frac{f'(x)-12}{x+1} = \lim_{x\to-1}\frac{x^2-5x+6-12}{x+1} = \lim_{x\to-1}\frac{x^2-5x-6}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to-1}\frac{(x-6)(x+1)}{(x+1)} = \lim_{x\to-1}(x-6) = -7$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το ζητούμενο δεντροδιάγραμμα είναι:



Έτσι ο δειγματικός χώρος είναι:
Ω = {ΑΑΑ, ΑΑΚ, ΑΚΑ, ΑΚΚ, ΚΑΑ, ΚΑΚ, ΚΚΑ, ΚΚΚ}

Γ2. Α = {ΚΑΑ, ΚΑΚ, ΚΚΑ, ΚΚΚ}
Β = {ΑΚΚ, ΚΑΚ, ΚΚΑ, ΚΚΚ}
Γ = {ΑΑΑ, ΑΑΚ, ΚΚΑ, ΚΚΚ}

Γ3. **α)** $\Delta = \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \left\{\text{ΚΑΚ, ΚΚΑ, ΚΚΚ}\right\}$

$\mathrm{E} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \left\{\text{ΚΑΑ, ΑΚΚ, ΚΑΚ, ΚΚΑ, ΚΚΚ}\right\}$

$\mathrm{Z} = \Gamma - \mathrm{E} = \left\{\text{ΑΑΑ, ΑΑΚ}\right\}$.

Οι αντίστοιχες πιθανότητες είναι:

$$\mathrm{P}\left(\Delta\right) = \frac{\mathrm{N}\left(\Delta\right)}{\mathrm{N}\left(\Omega\right)} = \frac{3}{8}, \qquad \mathrm{P}\left(\mathrm{E}\right) = \frac{\mathrm{N}\left(\mathrm{E}\right)}{\mathrm{N}\left(\Omega\right)} = \frac{5}{8}, \qquad \mathrm{P}\left(\mathrm{Z}\right) = \frac{\mathrm{N}\left(\mathrm{Z}\right)}{\mathrm{N}\left(\Omega\right)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

β) $\mathrm{P(H)} = \mathrm{P}\left[(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})'\right] = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{E}) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

$$P(\Theta)=P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=$$
$$=\frac{4}{8}+\frac{4}{8}-2\cdot\frac{3}{8}=1-\frac{6}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Χρόνος (σε λεπτά)	**Κεντρική Τιμή** x_i	**Συχνότητα** v_i
$[8,8+c)=[8,\ 12)$	$x_1=10$	$v_1=20$
$[8+c,\ 8+2c)=[12,\ 16)$	$x_2=14$	$v_2=15$
$[8+2c,\ 8+3c)=[16,\ 20)$	$x_3=18$	$v_3=10$
$[8+3c,\ 8+4c)=[20,\ 24)$	$x_4=22$	$v_4=5$
ΣΥΝΟΛΟ		$v=50$

Ο προσδιορισμός του c προκύπτει από το δεδομένο $x_2=14$.

$$x_2=14\Leftrightarrow\frac{(8+c)+(8+2c)}{2}=14\Leftrightarrow\frac{16+3c}{2}=14\Leftrightarrow c=4$$

Δ2. Αφού $c=4$ προκύπτει ότι $x_1=\frac{8+12}{2}=10$,

$x_3=\frac{16+20}{2}=18$, $x_4=\frac{20+24}{2}=22$.

Δίνεται ότι η μέση τιμή είναι 14, άρα:

$$\bar{x}=14\Leftrightarrow\frac{1}{v}\cdot\left(v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3+v_4x_4\right)=14\Leftrightarrow\frac{1}{v}\cdot\left(20\cdot10+15\cdot14+10\cdot18+v_4\cdot22\right)=14\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 200+210+180+22\cdot v_4=14\cdot\left(20+15+10+v_4\right)\Leftrightarrow 590+22\cdot v_4=14\cdot\left(45+v_4\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 590+22\cdot v_4=630+14\cdot v_4\Leftrightarrow 8\cdot v_4=40\Leftrightarrow v_4=5$$

Δ3. Το πλήθος των υπολογιστών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 9 λεπτά ισούται με το συνολικό τους πλήθος μείον το πλήθος των υπολογιστών που χρειάστηκαν εως 9 λεπτά.

Εώς 9 λεπτά χρειάστηκαν $\frac{1}{4}\cdot20=5$ υπολογιστές.

Έτσι το ζητούμενο πλήθος είναι 45.

Δ4. Για τον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης, θα χρησιμοποιήσουμε τον επόμενο πίνακα:

x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$	$x_i^2 \cdot v_i$
10	20	200	2000
14	15	210	2940
18	10	180	3240
22	5	110	2420
Σύνολο	50	700	10600

$$S^2 = \frac{1}{v}\left\{\Sigma x_i^2 v_i - \frac{\left(\Sigma x_i v_i\right)^2}{v}\right\} = \frac{1}{50}\cdot\left[10.600 - \frac{700^2}{50}\right] =$$

$$\frac{1}{50}\cdot\left(10.600 - \frac{490.000}{50}\right) = \frac{1}{50}\cdot(10.600 - 9.800) =$$

$\frac{1}{50}\cdot 800 = 16$. Άρα τελικά $s = 4$.

Ο συντελεστής μεταβολής είναι:

CV$=\frac{s}{\bar{x}} = \frac{4}{14} \simeq 0,28 > 0,1$. Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Δ5. Είναι $y_i = \frac{80}{100}\cdot x_1 = 0,8\cdot x_1$, όπου y_i οι αντίστοιχες τιμές των επιδόσεων των νέων υπολογιστών.

Από σχετική εφαρμογή του σχολικού βιβλίου, ισχύει ότι:

$\bar{y} = 0,8\cdot\bar{x}$ και $S_y = 0,8\cdot S_x$.

Επομένως $cv_y = \frac{S_y}{\bar{y}} = \frac{0,8\cdot S_x}{0,8\cdot\bar{x}} = \frac{S_x}{\bar{x}} = cv_x$

Άρα το καινούργιο δείγμα χρόνων δεν είναι ομοιογενές, όπως και το προηγούμενο.