ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β΄

25 ΜΑΪΟΥ 2015

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

(ΘΕΜΑΤΑ Α-Δ3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σελίδα 194 σχολικού βιβλίου.
Α2. Θεωρία, σελίδα 188 σχολικού βιβλίου.
Α3. Θεωρία, σελίδα 259 σχολικού βιβλίου.
Α4. α) Λ, β) →Σ , γ) →Λ , δ) Σ, ε) → Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε από τη δοσμένη σχέση προκύπτει

$$\left|(x-4)+yi\right| = 2\left|(x-1)+yi\right| \Leftrightarrow (x-4)^2 + y^2 = 4\left[(x-1)^2 + y^2\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 = 4\left(x^2 - 2x + 1 + y^2\right) \Leftrightarrow$$

$$3x^2 + y^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2^2.$$

Δηλαδή προκύπτει κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ = 2.

Β2. **α)** Ο w είναι πραγματικός, αν και μόνο αν, είναι $\overline{w} = w$.

Όμως

$$\overline{w} = w \Leftrightarrow \frac{2\overline{z_1}}{\overline{z_2}} + \frac{2\overline{z_2}}{\overline{z_1}} = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} \Leftrightarrow \frac{\left(\overline{z_1}^2 + \overline{z_2}^2\right)}{\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}} = \frac{\left(z_1^2 + z_2^2\right)}{z_1 \cdot z_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{z_1}^2 \cdot z_1 \cdot z_2 + \overline{z_2}^2 \cdot z_1 \cdot z_2 = z_1^2 \cdot \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} + z_1^2 \cdot \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(z_1\overline{z_1}\right)\overline{z_1} \cdot z_2 + \left(z_2\overline{z_2}\right) z_1 \cdot \overline{z_2} = \left(z_1\overline{z_1}\right) z_1 \cdot \overline{z_2} + \left(z_2\overline{z_2}\right) z_2 \cdot \overline{z_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_1|^2 \cdot \overline{z_1} \cdot z_2 + |z_2|^2 \cdot z_1 \cdot \overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot z_1 \cdot \overline{z_2} + |z_2|^2 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\overline{z_1} \cdot z_2 + 4z_1\overline{z_2} = 4z_1 \cdot \overline{z_2} + 4z_2\overline{z_1} \Leftrightarrow 0 = 0, \text{ αληθές.}$$

Άρα $\overline{w} = w$ και $w \in \mathbb{R}$.

β) Αρκεί να δείξουμε ότι $|w| \le 4$.

Πράγματι:

$$|w| \le 4 \Leftrightarrow \left|\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}\right| \le 4 \Leftrightarrow \left|\frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1 \cdot z_2}\right| \le 2 \Leftrightarrow \left|z_1^2 + z_2^2\right| \le 2|z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow \left|z_1^2 + z_2^2\right| \le 8.$$

Η τελευταία ισχύει διότι:

$$\left|z_1^2 + z_2^2\right| \le \left|z_1^2\right| + \left|z_2^2\right| \Leftrightarrow \left|z_1^2 + z_2^2\right| \le |z_1|^2 + |z_2|^2 \Leftrightarrow \left|z_1^2 + z_2^2\right| \le 2^2 + 2^2 \Leftrightarrow \left|z_1^2 + z_2^2\right| \le 8.$$

Β3. Αν w =-4 είναι $\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}=-4 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}=-2 \Leftrightarrow z_1^2+z_2^2=-2z_1\cdot z_2 \Leftrightarrow \left(z_1+z_2\right)^2=0.$

Από τη σχέση $\left(z_1+z_2\right)^2=0$ προκύπτει $z_1+z_2=0 \Leftrightarrow z_1=-z_2$.

$\left|z_3-z_1\right|=\left|2iz_1-z_1\right|=\left|z_1\right|\cdot\left|2i-1\right|=2\cdot\left|-1+2i\right|=2\sqrt{5}.$

$\left|z_3-z_2\right|=\left|2iz_1+z_1\right|=\left|z_1\right|\cdot\left|2i+1\right|=2\cdot\sqrt{5}$

Προκύπτει $\left|z_3-z_1\right|=\left|z_3-z_2\right| \Leftrightarrow (\text{ΑΓ})=(\text{ΒΓ})$.

Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $f'(x)=\frac{e^x\left(x^2+1\right)-e^x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{e^x\left(x-1\right)^2}{\left(x^2+1\right)^2},\quad x\in\mathbb{R}$.

Προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών για την f.

x	-∞		1		+∞
f ′		+	0	-	
f		↗		↗	

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, το σύνολο τιμών θα είναι το διάστημα $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\left(e^x\frac{1}{x^2+1}\right)=0\cdot 0=0 .$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+1}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(x^2+1\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{2}\right)=+\infty .$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $(0, +\infty)$.

Γ2. Η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$f\left(e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)\right)=f\left(2\right)$. Όμως η f ως γνησίως αύξουσα είναι και 1- 1. Άρα ισοδύναμα γράφεται : $e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)=2 \Leftrightarrow \frac{e^3}{2}=\frac{e^x}{x^2+1} \Leftrightarrow f\left(x\right)=\frac{e^3}{2}$. Όμως η τιμή $\frac{e^3}{2}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f, η οποία είναι και γνησίως αύξουσα. Άρα υπάρχει μοναδικό $x_0\in\mathbb{R}$ ώστε $f\left(x_0\right)=\frac{e^3}{2}$. Δηλαδή, η δοσμένη εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα.

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x)=\int_1^x f(t)\,dt,\ x\in(0,+\infty),\ \text{με } h'(x)=F(x).$$

Η σχέση $\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt<2x\,f(4x)$ με x> 0, γράφεται

$$\int_{2x}^{1} f(t)\,dt+\int_{1}^{4x} f(t)\,dt<2x\,f(4x)\Leftrightarrow\int_{1}^{4x} f(t)\,dt-\int_{1}^{2x} f(t)\,dt<2x\,f(4x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{h(4x)-h(2x)}{4x-2x}<f(4x).\ (1)$$

Όμως για την h ισχύει το Θ.Μ.Τ. στο $[2x,4x]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(2x,4x)$ ώστε

$$\frac{h(4x)-h(2x)}{4x-2x}=h'(\xi)\Leftrightarrow\frac{h(4x)-h(2x)}{4x-2x}=f(\xi).$$

Έτσι αρκεί να δειχθεί ότι $f(\xi)<f(4x)$ με $2x<\xi<4x$, που όμως ισχύει διότι η F είναι γνησίως αύξουσα.

Γ4. Η g είναι συνεχής στο $x_0=0$ διότι:

Για το $x>0$ είναι

$$g(x)=\frac{\int_{2x}^{1} f(t)dt+\int_{1}^{4x} f(t)dt}{x}=\frac{-\int_{1}^{2x} f(t)dt+\int_{1}^{4x} f(t)dt}{x}=\frac{-h(2x)+h(4x)}{x}.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to0} g(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{h(4x)-h(2x)}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4h'(x)-2h'(x)}{(x)'}=$

$$=\lim_{x\to0}\big(4f(4x)-2f(2x)\big)=4f(0)-2f(0)=4-2=2.$$

Άρα η g είναι συνεχής στο 0.

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$g'(x)=\left(\frac{h(4x)-h(2x)}{x}\right)'=\left(\frac{h(4x)}{x}\right)'-\left(\frac{h(2x)}{x}\right)'=$$

$$=\frac{\big(h(4x)\big)'\cdot x-h(4x)\cdot x'}{x^2}-\frac{\big(h(2x)\big)'\cdot x-h(2x)\cdot x'}{x^2}=$$

$$=\frac{4f(4x)\cdot x-h(4x)-2f(2x)\cdot x+h(2x)}{x^2}=$$

$$=\frac{\big[2xf(4x)-2xf(2x)\big]+2xf(4x)-\big[h(4x)-h(2x)\big]}{x^2}=$$

$$=2\cdot\frac{f(4x)-f(2x)}{x}+\frac{2xf(4x)-\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt}{x^2}.$$

Όμως $4x>2x$ και f γνησίως αύξουσα , άρα $f(4x)>f(2x)\Leftrightarrow f(4x)-f(2x)>0$

και λόγω του Γ_3 είναι $2xf(4x)-\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt>0.$

Άρα $g'(x) > 0$ για κάθε , οπότε (λόγω της συνέχειας στο 0), η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$f'(x) \cdot e^{f(x)} + f'(x) \cdot e^{-f(x)} = 2 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)} - e^{-f(x)}\right)' = (2x)' \Leftrightarrow$

$e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + c.$

Για $x=0$ είναι: $e^{f(0)} - e^{-f(0)} = c$ και επειδή $f(0) = 0$, προκύπτει $c = 0$.

Άρα $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x \Leftrightarrow e^{f(x)} - \frac{1}{e^{f(x)}} = 2x \Leftrightarrow$

$\left(e^{f(x)}\right)^2 - 1 = 2x \cdot e^{f(x)} \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)^2 - 2x \cdot e^{f(x)} + x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow$

$\left(e^{f(x)} - x\right)^2 = x^2 + 1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

και επειδή η $e^{f(x)} - x$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ προκύπτει ότι η $e^{f(x)} - x$ διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Όμως $e^{f(0)} - 0 = 1 > 0$.

Άρα $e^{f(x)} - x = \sqrt{x^2+1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2+1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ2. α) Είναι $f'(x) = \left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)' =$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \ x \in \mathbb{R}.$$

και $f''(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{x^2+1}\cdot(x^2+1)} = \dfrac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}, \ x \in \mathbb{R}.$

Από τον παρακάτω πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\smile$		$\frown$

προκύπτει ότι η f είναι:
κυρτή στο $(-\infty, 0]$, κοίλη στο $[0, +\infty)$
ενώ παρουσιάζει σημείο καμπής στο σημείο
$(0, f(0)) = (0, 0)$.

Δ2. β) Είναι $x - f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$.

Πράγματι: Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x - f(x)$ στο $[0,1]$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με

$$g'(x) = (x - f(x))' = 1 - f'(x) = 1 - [\ln(x + \sqrt{x^2+1})]' =$$

$$= 1 - \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)' =$$

$$= 1 - \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(\frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}}\right) =$$

$$= 1 - \frac{(\sqrt{x^2+1} + x)}{(x+\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+1})} =$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{\sqrt{x^2+1}} \geq 0 \quad \forall x \in [0,1].$$

Επομένως η g είναι ↑ στο $[0,1]$.

Οπότε $g(x) \geq g(0) \quad \forall x \in [0,1]$. Όμως $g(0) = 0 - f(0) = 0$.

Άρα $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$, άρα $x - f(x) \geq 0 \; \forall x \in [0,1]$

Έτσι είναι: $E = \int_0^1 (x - f(x))dx = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 f(x)dx =$

$$= \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2+1})dx \quad (1)$$

Είναι • $\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{2}$

• $\int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2+1})dx = \int_0^1 x' \ln(x + \sqrt{x^2+1})dx =$

$$= [x\ln(x+\sqrt{x^2+1})]_0^1 - \int_0^1 x \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx =$$

$$= [x\ln(x+\sqrt{x^2+1})]_0^1 - [\sqrt{x^2+1}]_0^1 =$$

$$= [\ln(1+\sqrt{2})] - [\sqrt{2} - 1] = \ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1.$$

Οπότε η (1) γράφεται:

$$E = \frac{1}{2} - (\ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1) = \frac{1}{2} - \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1 =$$

$$= \sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{2} \text{ τμ}$$

Δ3. Επειδή $F'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$ προκύπτει

ότι $F \nearrow$ στο $\mathbb{R}$. Οπότε για $x>0 \Rightarrow$
$F(x)>F(0)=0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to0^+}(\ln|F(x)|)=\lim\limits_{x\to0^+}(\ln F(x))=-\infty$.

Είναι: $\lim\limits_{x\to0^+}\left[\left(e^{\int_0^x F^2(t)dt}-1\right)\ln|F(x)|\right]=$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\left(e^{\int_0^x F^2(t)dt}-1\right)\cdot\ln F(x)\right]=$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{e^{\int_0^x F^2(t)dt}-1}{F(x)}\cdot F(x)\cdot\ln F(x)\right].$

Υπολογίζουμε:

• $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{\int_0^x F^2(t)dt}-1}{F(x)}\overset{0/0}{\underset{LH}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{\int_0^x F^2(t)dt}\cdot F^2(x)}{F'(x)}=\frac{1\cdot0}{1}=0.$

• $\lim\limits_{x\to0^+}[F(x)\cdot\ln F(x)]\overset{F(x)=n}{=\!=\!=}\lim\limits_{n\to0^+}(n\cdot\ln n)=$

$=\lim\limits_{n\to0^+}\frac{\ln n}{\frac{1}{n}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{LH}{=}}\lim\limits_{n\to0^+}\frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n^2}}=-\lim\limits_{n\to0^+}n=0.$

Άρα $\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{e^{\int_0^x F^2(t)dt}-1}{F(x)}\cdot F(x)\cdot\ln F(x)\right]=0.$