

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β'

2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A₁. Θεωρία 6ετ. 251 βιβλίου βιβλίου.
A₂. Θεωρία 6ετ 273 βιβλίου βιβλίου.
A₃. Θεωρία 6ετ. 150 βιβλίου βιβλίου.
A₄. α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

- B₁. Αν θέσουμε $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ θα είναι
 $\bar{z} = x - yi$ και η δοσμένη εξίσωση γραφεται
 $2(x^2 + y^2) + 2xi - 4 - 2i = 0 \Leftrightarrow$
 $[2(x^2 + y^2) + 4] + (2x - 2)i = 0 \Leftrightarrow$
 $[(x^2 + y^2) - 2] + (x - 1)i = 0 \Leftrightarrow$
 $x^2 + y^2 - 2 = 0$ και $x - 1 = 0 \Leftrightarrow$
 $x^2 + y^2 = 2$ και $x = 1 \Leftrightarrow$
 $y^2 = 1$ και $x = 1 \Leftrightarrow$
 $y = \pm 1$ και $x = 1$.

Άρα οι ρίζες είναι $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$

$$\begin{aligned}
 \text{B2. Είναι } w &= 3 \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{39} = 3 \cdot \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{39} = \\
 &= 3 \left[\frac{(1+i)(1+i)}{2} \right]^{39} = 3 \cdot \left[\frac{1+2i-1}{2} \right]^{39} = \\
 &= 3(i)^{39} = 3i^{38} \cdot i = 3(i^2)^{19} \cdot i = 3(-1)^{19} \cdot i = 3(-1) \cdot i = -3i.
 \end{aligned}$$

B3. Η σχέση $|u+w| = |4z_1 - z_2 - i|$ γράφεται:

$$|u - 3i| = |4 + 4i - 1 + i - i| \Leftrightarrow$$

$$|u - 3i| = |3 + 4i| \Leftrightarrow |u - 3i| = 5. \text{ Αν } u = x + yi, \text{ χ, y ∈ ℝ}$$

έχουμε $|x + yi - 3i| = 5 \Leftrightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 5^2$

Επομένως ο γ.τ. των παραστάσεων u είναι
 κύβλος με κέντρο $K(0, 3)$ και ακτίνα
 $\rho = 5$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ₁. Είναι $h'(x) = \frac{(e^x+1)'}{e^x+1} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1} > 0$
για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα h είναι γν. αύξουσα στο \mathbb{R} .

Επίσης, είναι $h''(x) = \left(\frac{1}{e^x+1}\right)' = -\frac{(e^x+1)'}{(e^x+1)^2} = -\frac{e^x}{(e^x+1)^2} < 0$
για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα h είναι κοίμη στο \mathbb{R} .

Γ₂. Η δοσμένη ανίσωση γράφεται ισοδύναμα :

$$e^{h(2h(x))} < \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow \ln[e^{h(2h(x))}] < \ln\left(\frac{e}{e+1}\right) \quad (1)$$

Επειδή $h(1) = 1 - \ln(e+1) = \ln e - \ln(e+1) = \ln\left(\frac{e}{e+1}\right)$
η (1) γράφεται $\ln[e^{h(2h(x))}] < h(1)$.

Επειδή h είναι γν. αύξουσα στο \mathbb{R} , προκύπτει
ισοδύναμα ότι $2h(x) < 1 \Leftrightarrow h'(x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
 $h(x) < h(0) \quad (2)$.

Επειδή h είναι κοίμη στο \mathbb{R} , θα είναι και
 $h'(x)$ γν. φθίνουσα στο \mathbb{R} .

Ετσι από την (2) προκύπτει ισοδύναμα $x > 0$.

$$\Gamma 3. \bullet \text{ \u0395\u03b9\u03c1\u03b1\u03b9 } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \ln(e^x + 1)] =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln e^x - \ln(e^x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{e^x}{e^x + 1} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{e^x + 1 - 1}{e^x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{e^x + 1} \right) \stackrel{*}{=} \ln 1 = 0$$

* \u0394\u03b9\u03cc\u03c4\u03b9 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x + 1} = 0$ \u03b1\u03c6\u03cc\u03c5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{e^x + 1} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \ln(1 - y) = \ln 1 = 0.$$

\u038c\u03c1\u03b1 \u03b7 \u03cc\u03c1\u03b9\u03c3\u03c4\u03c9\u03c4\u03b9\u03b1 \u03b1\u03b2\u03c5\u03bc\u03c0\u03c4\u03c9\u03c4\u03b9 \u03b5\u03c1\u03c9 \u03c4\u03c9 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03b7 $y = 0$.

- \u0393\u03b9\u03b1 \u03c4\u03b7\u03bd \u03c0\u03b9\u03c1\u03b1\u03b9\u03b1 \u03b1\u03b2\u03c5\u03bc\u03c0\u03c4\u03c9\u03c4\u03b9 \u03b5\u03c1\u03c9 $-\infty$ \u03b5\u03c7\u03c1\u03b1\u03c6\u03b5:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \ln(e^x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{\ln(e^x + 1)}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[1 - \frac{1}{x} \ln(e^x + 1) \right] = 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

\u0394\u03b9\u03cc\u03c4\u03b9 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 1) = \ln 1 = 0$, \u03b1\u03c6\u03cc\u03c5 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

\u03c5\u03b1\u03b9 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

\u038c\u03c1\u03b9\u03b8\u03b5\u03c1\u03b9\u03c3 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x - \ln(e^x + 1) - x]$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} [-\ln(e^x + 1)] = -\ln 1 = 0.$$

\u038c\u03c1\u03b1 \u03b7 \u03c0\u03b9\u03c1\u03b1\u03b9\u03b1 \u03b1\u03b2\u03c5\u03bc\u03c0\u03c4\u03c9\u03c4\u03b9 \u03c4\u03b7\u03c2 h \u03b5\u03c1\u03c9 $-\infty$ \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03b7 $y = x$.

Γ4. Βρίσκουμε τις ρίζες και το πρόσημο της φ .
 Επειδή $e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αρκεί να
 μελετήσουμε την $g(x) = h(x) + \ln 2 = h(x) - h(0)$.
 Όμως, $g'(x) = h'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα
 η g γν. αύξουσα στο \mathbb{R} .

$$\text{Επίσης } g(0) = h(0) - h(0) = 0.$$

Επειδή η g είναι γν. αύξουσα, η ρίζα $x=0$
 θα είναι μοναδική για την g .

Για $x \geq 0$ θα είναι $g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow g(x) \geq 0$.

Επομένως $\varphi(x) = e^x \cdot g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty[$.

$$\text{Άρα } E = \int_0^1 \varphi(x) dx = \int_0^1 [e^x h(x) + e^x \ln 2] dx =$$

$$= \int_0^1 [(e^x)' h(x)] dx + \ln 2 \int_0^1 e^x dx =$$

$$= [e^x h(x)]_0^1 - \int_0^1 e^x h'(x) dx + \ln 2 \cdot [e^x]_0^1 =$$

$$= e h(1) - h(0) - \int_0^1 e^x \frac{1}{e^x+1} dx + \ln 2 (e-1) =$$

$$= e(1 - \ln(e+1)) + \ln 2 \int_0^1 \frac{(e^x+1)'}{e^x+1} dx + (e-1)\ln 2 =$$

$$= e - e \ln(e+1) + \ln 2 - [\ln(e^x+1)]_0^1 + (e-1)\ln 2 =$$

$$= e - e \ln(e+1) + e \ln 2 - [\ln(e+1) - \ln 2] =$$

$$= e - e \ln(e+1) + e \ln 2 - \ln(e+1) + \ln 2 =$$

$$= e - \ln(e+1)(e+1) + \ln 2 \cdot (e+1) =$$

$$= e - (e+1) [\ln(e+1) - \ln 2] = e - (e+1) \cdot \ln \frac{e+1}{2}.$$