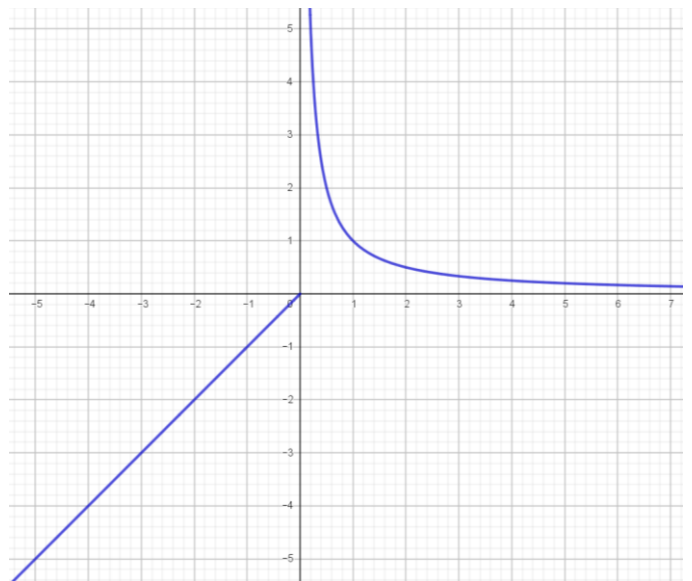


Θέμα Α

A.1. Θεωρία σχολικού βιβλίου, απόδειξη **σελίδα 99.**

A.2.

- α) Ψευδής.
β) Σχολικό βιβλίο σελίδα 35: Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες, όπως η συνάρτηση: $g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$



A.3. Θεωρία σχολικού βιβλίου,
Θεώρημα **σελίδα 216.**

A.4.

- α) **Λάθος**
β) **Λάθος**
γ) **Σωστό**
δ) **Σωστό**
ε) **Σωστό**

Θέμα Β

B1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{0\}$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \left(x - \frac{4}{x^2}\right)' = (x)' - \left(\frac{4}{x^2}\right)' = 1 - 4\left(\frac{1}{x^2}\right)' = 1 + \frac{8}{x^3}, \quad x \neq 0$$

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{x^3} = -1 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{8}{x^3} > -1$$

$$\frac{8}{x^3} + 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{8 + x^3}{x^3} > 0 \Leftrightarrow x^3(x^3 + 8) > 0$$

$x^3(x + 2)(x^2 - 2x + 4) > 0$ και το $x^2 - 2x + 4$ έχει $\Delta < 0$ συνεπώς $x^2 - 2x + 4 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Επομένως, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας προσήμων:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
x^3	-	-	○	+	
$x + 2$	-	○	+	+	
$x^2 - 2x + 4$	+	+	+	+	
ΓΙΝ	+	○	-	○	+

Τελικά $f'(x) > 0$ για $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

$f'(x) < 0$ για $x \in (-2, 0)$ και προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μονοτονίας - ακροτάτων:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	○	+
$f(x)$	↗		↘		↗

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα: $(-\infty, -2]$, $(0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2, 0)$. Επίσης, παρουσιάζει στη θέση $x = -2$, τοπικό μέγιστο το $f(-2) = -3$.

B2. Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{0\}$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$f''(x) = \left(1 + \frac{8}{x^3}\right)' = -\frac{24}{x^4} < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{0\}$$




Μεθοδικό Φροντιστήριο

Βουλιαγμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999
Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300
Ελ. Βενιζέλου 45 Ν.Σμύρνη, 210 93 10 320

www.methodiko.net

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Άρα η f είναι κοίλη στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ και δεν παρουσιάζει σημείο καμπής στο $\mathbb{R} - \{0\}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	-		-
f			

B3. Ελέγχουμε την f για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x = 0$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x - \frac{4}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x - 4 \cdot \frac{1}{x^2}\right) = 0 - 4 \cdot (+\infty) = -\infty$$

αφού $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0$ και $x^2 > 0$ για κάθε $x \neq 0$ κοντά στο 0 , οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - \frac{4}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - 4 \cdot \frac{1}{x^2}\right) = 0 - 4 \cdot (+\infty) = -\infty$$

Αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$ και $x^2 > 0$ για κάθε $x \neq 0$ κοντά στο 0 , οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Οπότε η $x = 0$ είναι η κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Ελέγχουμε την f για ασύμπτωτες στα $-\infty$ και $+\infty$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \frac{4}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1 = \lambda$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x - \frac{4}{x^2} - x\right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{4}{x^2}\right) \\ &= -4 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 = \beta \end{aligned}$$

Άρα η $y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \frac{4}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1 = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{4}{x^2} - x\right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{4}{x^2} = -4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 = \beta$$

Άρα η $y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Οπότε η C_f δεν παρουσιάζει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ ή στο $+\infty$ εφόσον παρουσιάζει πλάγια.

β τρόπος για τις πλάγιες ασύμπτωτες:

Είναι: $f(x) - x = -\frac{4}{x^2}$. Επειδή: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0$ θα είναι και $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = 0$, οπότε η $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Μεθοδικό Φροντιστήριο

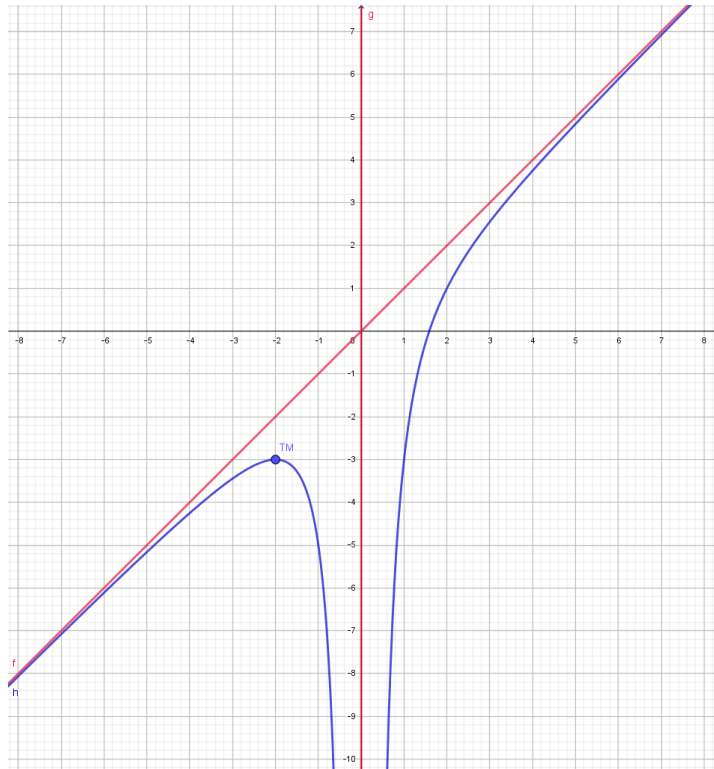
Βουλιαγμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999

Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300

Ελ. Βενιζέλου 45 Ν.Σμύρνη, 210 93 10 320

www.methodiko.net

B4. Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει η γραφική παράσταση:



Θέμα Γ

Γ1. Η πλευρά του τετραγώνου είναι $a = \frac{x}{4} m$ και το εμβαδόν του $E_1(x) = \frac{x^2}{16}$, $x \in (0,8)$.

Το μήκος του κύκλου είναι $8 - x m$, άρα για την ακτίνα του ισχύει $2\pi\rho = 8 - x \Leftrightarrow \rho = \frac{8-x}{2\pi} m$ και το εμβαδόν του

$$E_2(x) = \pi \left(\frac{8-x}{2\pi} \right)^2 = \pi \frac{64 - 16x + x^2}{4\pi^2} = \frac{x^2 - 16x + 64}{4\pi}, \quad x \in (0,8)$$

$$\text{Επομένως, } E(x) = \frac{\pi x^2 + 4x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \quad x \in (0,8)$$

Γ2. Η E είναι παραγωγίσιμη στο $(0,8)$ με

$$E'(x) = \frac{2(\pi + 4)x - 64}{16\pi}, \quad x \in (0,8)$$

Θέτουμε:

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{32}{\pi + 4}$$

και προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας - ακροτάτων:

Μεθοδικό Φροντιστήριο

Βουλιαγμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999
Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300
Ελ. Βενιζέλου 45 Ν.Σμύρνη, 210 93 10 320

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

x	0	$\frac{32}{\pi+4}$	8
$E'(x)$		○	
$E(x)$		↓	

ολ. ελαχ.

Συνεπώς η E παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = \frac{32}{\pi+4} m$. Για την τιμή αυτή ισχύει $\alpha = \frac{8}{\pi+4} m$ και

$$\delta = 2\rho = \frac{8 - \frac{32}{\pi+4}}{\pi} = \frac{8(\pi+4) - 32}{\pi(\pi+4)} = \frac{8\pi}{\pi(\pi+4)} = \frac{8}{\pi+4} m$$

Τελικά, για $x = \frac{32}{\pi+4} m$ η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Γ3. Έχουμε ότι :

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} E(x) = \frac{16}{\pi}$
- $\lim_{x \rightarrow 8^-} E(x) = 4$
- $E\left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{(\pi+4) \cdot \frac{32^2}{(\pi+4)^2} - 64 \cdot \frac{32}{\pi+4} + 256}{16\pi} =$

$$= \frac{32^2 - 64 \cdot 32 + 256(\pi+4)}{16\pi(\pi+4)} = \frac{16[64 - 128 + 16(\pi+4)]}{16\pi(\pi+4)} =$$

$$= \frac{-64 + 16\pi + 64}{\pi(\pi+4)} = \frac{16\pi}{\pi(\pi+4)} = \frac{16}{\pi+4}$$

Επειδή η E είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = \left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$,

$$\text{ισχύει } E(\Delta_1) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x \rightarrow 0^+} E(x)\right) = \left[\frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi}\right).$$

Επειδή η E είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = \left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$,

$$\text{ισχύει } E(\Delta_2) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x \rightarrow 8^-} E(x)\right) = \left[\frac{16}{\pi+4}, 4\right).$$

Αφού $\frac{16}{\pi} > 5$, ισχύει $5 \in E(\Delta_1)$ και η εξίσωση $E(x) = 5$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ_1 επειδή η E είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 .

Αφού $5 \notin E(\Delta_2)$, η εξίσωση $E(x) = 5$ δεν έχει ρίζα στο Δ_2 .

Άρα, υπάρχει ένας μόνο τρόπος ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με $5m^2$.

Μεθοδικό Φροντιστήριο

Βουλιαγμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999
 Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300
 Ελ. Βενιζέλου 45 Ν.Σμύρνη, 210 93 10 320

www.methodiko.net

Θέμα Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = 2e^{x-a} - 2x = 2(e^{x-a} - x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f''(x) = 2(e^{x-a} - 1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-a} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x-a} = e^0 \Leftrightarrow x - a = 0 \Leftrightarrow x = a$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow e^{x-a} - 1 < 0 \Leftrightarrow e^{x-a} < e^0 \Leftrightarrow x - a < 0 \Leftrightarrow x < a$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x-a} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x-a} > e^0 \Leftrightarrow x - a > 0 \Leftrightarrow x > a$$

Επειδή η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν της θέσης $x = a$ και ορίζεται εφαπτομένη της C_f στη θέση αυτή το $K(a, f(a))$ δηλαδή το $K(a, 2 - a^2)$ είναι σημείο καμπής της C_f

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f''(x)$	-	○	+
$f(x)$	↪		↶

Δ2. Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, a]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [a, +\infty)$.

Επειδή η f' είναι συνεχής στο \mathbb{R} ισχύουν: $f'(\Delta_1) = [f'(a), \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)] = [2 - 2a, +\infty)$

και $f'(\Delta_2) = [f'(a), \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)] = [2 - 2a, +\infty)$,

αφού: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^{x-a} - 2x) = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{x-a} \left(1 - \frac{x}{e^{x-a}} \right) \right) = +\infty$, εφόσον:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x-a}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-a}} = 0, \text{ με χρήση του κανόνα } D.L.H. \text{ για απροσδιόριστη μορφή } \left\langle \frac{+\infty}{+\infty} \right\rangle.$$

Επειδή $0 \in f'(\Delta_1)$ και $0 \in f'(\Delta_2)$ υπάρχουν μοναδικοί $x_1 \in (-\infty, a)$ και $x_2 \in (a, +\infty)$ τέτοιοι ώστε να ισχύει $f'(x_1) = 0$ και $f'(x_2) = 0$ αφού η f' είναι γνησίως μονότονη στα διαστήματα Δ_1 και Δ_2 .

Για κάθε $x < x_1$ ισχύει $f'(x) > f'(x_1)$ και $f'(x) > 0$

Για κάθε $x_1 < x < a$ ισχύει $f'(x_1) > f'(x)$ και $f'(x) < 0$

Οπότε η f παρουσιάζει στη θέση x_1 τοπικό μέγιστο το $f(x_1)$ όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Για κάθε $a < x < x_2$ ισχύει $f'(x) < f'(x_2)$ και $f'(x) < 0$

Για κάθε $x > x_2$ ισχύει $f'(x) > f'(x_2)$ και $f'(x) > 0$

Οπότε η $f(x_2)$ όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Μεθοδικό Φροντιστήριο

Βουλιαγμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999
 Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300
 Ελ. Βενιζέλου 45 Ν.Σμύρνη, 210 93 10 320

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

x	$-\infty$	x_1	1	a	x_2	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-	○	+	
$f(x)$	↗		↘		↗	
		Τοπικό Μέγιστο		Τοπικό Ελάχιστο		

Δ3. Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta = [a, x_2]$, οπότε:

$$f(\Delta) = [f(x_2), f(a)] = [f(x_2), 2 - a^2]$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(1) \notin f(\Delta)$, δηλαδή: $f(1) > 2 - a^2 \Leftrightarrow 2e^{1-a} - 1 > 2 - a^2 \Leftrightarrow 2e^{1-a} + a^2 - 3 > 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $h(x) = 2e^{1-x} + x^2 - 3$, με $x \geq 1$ και $h(1) = 0$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ με $h'(x) = -2e^{1-x} + 2x$.

Για κάθε $x > 1$ ισχύει: $-x < -1 \Leftrightarrow 1 - x < 0 \Leftrightarrow e^{1-x} < 1$, εφόσον η e^x είναι γνησίως αύξουσα, οπότε έχουμε: $-2e^{1-x} > -2 \Leftrightarrow -2e^{1-x} + 2x > 2x - 2$

Οπότε: $h'(x) > 2(x - 1) > 0$, για κάθε $x > 1$.

Άρα, η h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$ και η $x = 1$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0$. Για κάθε $x > 1 \Leftrightarrow h(x) > h(1) \Leftrightarrow h(x) > 0$.

Άρα $h(a) > 0 \Leftrightarrow 2e^{1-a} + a^2 - 3 > 0$, για κάθε $a > 1$.

β' τρόπος:

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, x_2)$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $f(x_0) = f(1)$ τότε από εφαρμογή του Θ. Rolle για τη συνάρτηση f στο διάστημα $(1, x_0)$ εξασφαλίζουμε ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, x_0)$ ώστε να ισχύει: $f'(\xi) = 0$, το οποίο είναι άτοπο γιατί ισχύει η παρακάτω διάταξη: $x_1 < 1 < a < \xi < x_0 < x_2$.

Απόδειξη του ισχυρισμού $x_1 < 1$, αφού η ανίσωση: $\xi < x_0 < x_2$ είναι προφανής.

Ισχύουν: $f'(x_1) = 0$ και $f'(1) = 2(e^{1-a} - 1) < 0$, αφού $a > 1$.

Άρα, έχουμε: $f'(x_1) > f'(1)$ και εφόσον f' γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, a)$ ισχύει: $x_1 < 1$.

Δ4. Για $a = 2$ ισχύει $f(x) = 2e^{x-2} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$ με $f'(x) = 2e^{x-2} - 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $K(2, -2)$ έχει εξίσωση

$$(\varepsilon): y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2), \text{ όπου } f(2) = -2 \text{ και } f'(2) = -2$$

Μεθοδικό Φροντιστήριο

Βουλιαγμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999

Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300

Ελ. Βενιζέλου 45 Ν.Σμύρνη, 210 93 10 320

www.methodiko.net

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

$$(\varepsilon): y + 2 = -2(x - 2)$$

$$(\varepsilon): y = -2x + 2$$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $[2, +\infty)$ η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο K βρίσκεται κάτω από αυτήν με εξαίρεση το σημείο επαφής τους K .

Επομένως ισχύει $f(x) \geq -2x + 2$ για κάθε $x \geq 2$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 2$.

Άρα ισχύει $f(x) \cdot \sqrt{x-2} \geq (-2x + 2) \cdot \sqrt{x-2}$ αφού $x \geq 2$, με το « \geq » να ισχύει μόνο για $x = 2$.

$$\text{οπότε } \int_2^3 f(x) \cdot \sqrt{x-2} \, dx > \int_2^3 (-2x + 2) \cdot \sqrt{x-2} \, dx$$

$$\text{Έστω } I = \int_2^3 (-2x + 2) \cdot \sqrt{x-2} \, dx$$

$$u = \sqrt{x-2}, x-2 = u^2, dx = 2u \, du$$

$$x = 2, u = 0 \text{ και } x = 3, u = 1$$

Άρα:

$$I = \int_0^1 [-2(u^2 + 2) + 2] \cdot u \cdot 2u \, du$$

$$I = -4 \int_0^1 (u^4 + u^2) \, du$$

$$I = -4 \left[\frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} \right]_0^1$$

$$I = -4 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{-32}{15}$$

οπότε ισχύει:

$$\int_2^3 f(x) \cdot \sqrt{x-2} \, dx > \frac{-32}{15}$$

Επιμέλεια:

Ράλλης Βαγγέλης, Γιάννης Μερτίκας, Δημήτρης Βλάχος, Χρήστος Αναστασίου, Μάριος Παπαδιαμαντής, Αλέξανδρος Φιτσόπουλος, Αποστόλης Κωτσιαρίνης, Κωνσταντίνα Μωραΐτη, Δημήτρης Κότσιρας, Γιάννης Αλεξόπουλος, Ιάσωνας Μαρκάκης, Ηρώ Μαρκάκη

Ευχόμαστε καλά αποτελέσματα!

Μεθοδικό Φροντιστήριο

Βουλιαγμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999

Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300

Ελ. Βενιζέλου 45 Ν.Σμύρνη, 210 93 10 320

www.methodiko.net