Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης** ,

Ημ/νία: 28 Μαίου 2012

Απαντήσεις Θεμάτων

Θεμα Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 253

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 191

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 258

Α4. α. Σ **β.** Σ **γ.** Λ **δ.** Λ **ε.** Λ

Θεμα Β

Β1. 1ος τρόπος

Από τη σχέση (1) ισοδύναμα έχουμε:

$(z-1)\overline{(z-1)}+(z+1)\overline{(z+1)}=4$

$\Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1)+(z+1)(\bar{z}+1)=4$

$\Leftrightarrow z\bar{z}-z-\bar{z}+1+z\bar{z}+z+\bar{z}+1=4$

$\Leftrightarrow 2z\bar{z}=2$

$\Leftrightarrow |z|^2=1$

$\Leftrightarrow |z|=1$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο $0(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

2ος τρόπος

Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου, προκύπτει ότι:

$|z-1|^2+|z+1|^2=4 \Leftrightarrow 2|z|^2+2\cdot 1=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2|z|^2=2 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow |z|=1$

Β2. Έστω $M(z_1), N(z_2)$ και $N'(-z_2)$ οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 και $-z_2$. Το N' είναι το αντιδιαμετρικό του N στον κύκλο. Δηλαδή NN' διάμετρος.

Ισχύουν $|z_1-z_2|=|\overrightarrow{MN}|$

$$|z_1 + z_2| = \left|\overrightarrow{MN'}\right|$$

Η γωνία NMN' βαίνει σε ημικύκλιο και είναι ορθή. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο NMN' έχουμε:

$$\left|\overrightarrow{MN}\right|^2 + \left|\overrightarrow{MN'}\right|^2 = \left|\overrightarrow{NN'}\right|^2$$

$$\Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = (2\rho)^2$$

$$\Leftrightarrow 2 + |z_1 + z_2|^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{2}$$

2ος τρόπος

Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου, προκύπτει ότι:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

$$\Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 + 2 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{2}$$

B3. Από τη σχέση (2) θέτοντας $w = x + yi, \quad x, y \in \mathbb{R}$ παίρνουμε:

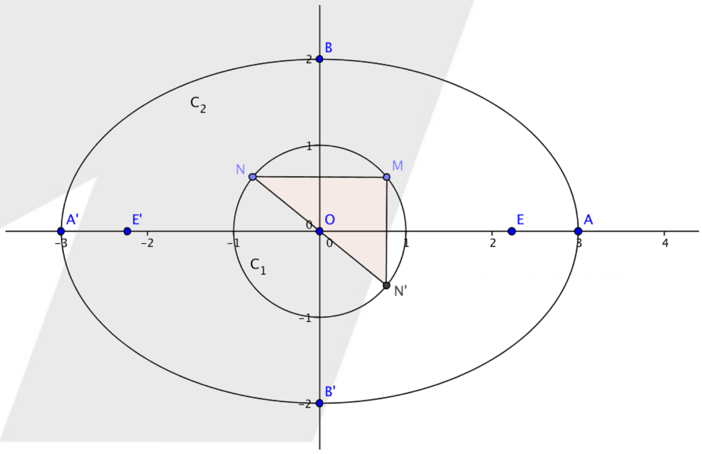
$$|x + yi - 5(x - yi)| = 12$$

$$\Leftrightarrow |-4x + 6yi| = 12$$

$$\Leftrightarrow |-4x + 16yi|^2 = 12^2$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 + 36y^2 = 144 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad (C_2)$$

Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι έλλειψη με $\alpha = 3, \beta = 2$ και $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 5$ δηλαδή $\gamma = \sqrt{5}$, αφού $\gamma > 0$.



Οι εστίες της έλλειψης είναι $E'\left(-\sqrt{5}, 0\right)$ και $E\left(\sqrt{5}, 0\right)$

Ισχύει: $\beta \leq |w| \leq a$

Συνεπώς $|w|_{max} = a = 3$ και $|w|_{min} = \beta = 2$

Β4. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$\big||z| - |-w|\big| \leq |z + (-w)| \leq |z| + |-w| \Leftrightarrow \big|1 - |w|\big| \leq |z - w| \leq 1 + |w| \quad (1),$

εφόσον $|z| = 1$

Όμως $|w|_{max} = 3$ συνεπώς $1 + |w| \leq 1 + |w|_{max} = 4 \ \ (2)$

και $|w|_{min} = 2$ οπότε $\big|1 - |w|\big| \geq |1 - |w|_{min}| = 1 \quad (3)$

Τελικά από (1), (2), (3) προκύπτει: $1 \leq |z - w| \leq 4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη με: $f'(x) = \ln x + \frac{x-1}{x} < 0$, για κάθε $x \in (0,1)$

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\varDelta_1 = (0,1]$.

Ισχύει: $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\varDelta_2 = [1, +\infty)$.

- η f είναι συνεχής στο $\varDelta_1 = (0,1]$
- η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\varDelta_1 = (0,1]$

Άρα: $f(\varDelta_1) = [f(1), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)) = [-1, +\infty)$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

- Η f είναι συνεχής στο $\varDelta_2 = [1, +\infty)$
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\varDelta_2$

Άρα: $f(\varDelta_2) = [f(1), \lim\limits_{x\to\infty} f(x)) = [-1, +\infty)$

Επειδή: $A_f = \varDelta_1 \cup \varDelta_2$ για το σύνολο τιμών της f έχουμε: $f(A) = f(\varDelta_1) \cup f(\varDelta_2) = [-1, +\infty)$.

Γ2. Για την εξίσωση έχουμε:

$x^{x-1} = e^{2013}$, με $x > 0$

$\Leftrightarrow \ln x^{x-1} = 2013$

$\Leftrightarrow (x-1)\ln x = 2013$

$\Leftrightarrow (x-1)\ln x - 1 = 2012$

$\Leftrightarrow f(x) = 2012 \quad (1)$

Επειδή: $2012 \in f(\Delta_1) = [-1, +\infty)$ η εξίσωση (1) έχει ακριβώς μια ρίζα $x_1 \in (0,1)$, αφού f γνησίως φθίνουσα στο Δ_1.

Επειδή: $2012 \in f(\Delta_2) = [-1, +\infty)$ η εξίσωση (1) έχει ακριβώς μια ρίζα $x_2 \in (1, +\infty)$, αφού f γνησίως αύξουσα στο Δ_2.

Άρα η εξίσωση έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες: $x_1 \in (0,1)$ και $x_2 \in (1, +\infty)$

Γ3.

Ισχύουν: $f(x_1) = 2012$ με $x_1 \in (0,1)$
$f(x_2) = 2012$ με $x_2 \in (1, +\infty)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση g με τύπο:

$g(x) = f'(x) + f(x) - 2012$ με $x \in [x_1, x_2]$

- η g είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως άθροισμα συνεχών αφού η f' είναι συνεχής (εφόσον η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη)
- $g(x_1) = f'(x_1) + f(x_1) - 2012$

  $\Leftrightarrow g(x_1) = f'(x_1) + 2012 - 2012$

  $\Leftrightarrow g(x_1) = f'(x_1)$

  $\Leftrightarrow g(x_1) = \ln x_1 + \dfrac{x_1 - 1}{x_1} < 0, \qquad$ αφού $x_1 \in (0,1)$

  και $g(x_2) = f'(x_2) + f(x_2) - 2012$

  $\Leftrightarrow g(x_2) = f'(x_2) + 2012 - 2012$

  $\Leftrightarrow g(x_2) = f'(x_2)$

  $\Leftrightarrow g(x_2) = \ln x_2 + \dfrac{x_2 - 1}{x_2} > 0, \qquad$ αφού $x_2 \in (1, +\infty)$

  Άρα: $g(x_1) \cdot g(x_2) < 0$

  Από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε: $g(x_0) = 0$

  $\Leftrightarrow f'(x_0) + f(x_0) - 2012 = 0$

  $\Leftrightarrow f'(x_0) + f(x_0) = 2012$

2ος τρόπος

Η λύση προκύπτει και με εφαρμογή του θεωρήματος Rolle στη συνάρτηση:
$h(x) = e^x f(x) - 2012\, e^x$ στο $x \in [x_1, x_2]$.

Γ4. Είναι: $g(x) = f(x) + 1 \geq 0$ αφού ισχύει $f(x) \geq -1$, για κάθε $x > 0$

Οπότε: $g(x) = (x-1)\ln x$ για $x > 0$

Λύνω την εξίσωση: $g(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = e$

Επομένως:

$$E(\Omega) = \int_1^e |g(x)|\,dx = \int_1^e g(x)\,dx = \int_1^e (x-1)\cdot\ln x = dx$$

$$E(\Omega) = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x\right)' \ln x\;dx$$

$$E(\Omega) = \int_1^e \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\ln x\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\cdot(\ln x)'\;dx$$

$$E(\Omega) = \frac{e^2}{2} - e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\frac{1}{x}\;dx$$

$$E(\Omega) = \frac{e^2}{2} - e - \int_1^e \left(\frac{x}{2} - 1\right)\;dx$$

$$E(\Omega) = \frac{e^2}{2} - e - \left[\frac{x^2}{4} - x\right]_1^e$$

$$E(\Omega) = \frac{e^2}{2} - e - \left[\frac{e^2}{4} - e - \frac{1}{4} + 1\right]$$

$$E(\Omega) = \frac{e^2 - 3}{4}\quad \tau.\mu.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει:

$$\int_1^{x^2-x+1} -f(t)\;dt \geq \frac{x - x^2}{e} \Leftrightarrow e\cdot\int_1^{x^2-x+1} f(t)\,dt + x^2 - x \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0$$

$\Leftrightarrow g(x) \geq g(1)$

όπου έχουμε θεωρήσει τη συνάρτηση:

$$g(x) = e\cdot\int_1^{x^2-x+1} f(t)\,dt + x^2 - x\,, x \in (0, +\infty)$$

Ισχύουν:

- η g παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=1$
- το 1 είναι εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ άρα και στο 1, με

$g'(x)=ef(x^2-x+1)\cdot(2x-1)+2x-1$ και $g'(1)=ef(1)+1$.

Σύμφωνα με το Θ. Fermat θα ισχύει: $g'(1)=0 \Leftrightarrow ef(1)+1=0 \Leftrightarrow f(1)=-\frac{1}{e}$

Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.
Αφού $f(1)=-\frac{1}{e}<0$, θα είναι $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Ισχύει: $\ln x - x = -\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)\cdot(-f(x))$

$\Leftrightarrow lnx - x = f(x)\cdot\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + ef(x)$

$\Leftrightarrow \frac{lnx-x}{f(x)} = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} + e \qquad (1)$

Επειδή:

$\ln x - x = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)\cdot f(x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln x - x}{\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)}$

(Έχουμε: $\ln x - x < 0$ *για κάθε* $x>0$ *και* $f(x)<0,$ *για κάθε* $x>0$.
Συνεπώς πρέπει: $\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e > 0)$

Η f είναι παραγωγίσιμη, αφού η $\frac{\ln t - t}{f(t)}$ είναι συνεχής (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων) και συνεπώς η $\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)$ είναι παραγωγίσιμη.

Θέτουμε: $h(x)=\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}\, dt \ , \ x\in(0,+\infty)$

και η (1) γράφεται :

$h'(x)=h(x)+e \Leftrightarrow h'(x)-h(x)=e \Leftrightarrow e^{-x}\cdot h'(x)-e^{-x}\cdot h(x)=e^{1-x}$

$\Leftrightarrow \ [e^{-x}h(x)]'=(-e^{1-x})' \Leftrightarrow e^{-x}h(x)=-e^{1-x}+c$

Για $x=1$ είναι : $e^{-1}\cdot h(1)=-1+c \Leftrightarrow 0=-1+c \Leftrightarrow c=1$

και τελικά: $e^{-x}\,h(x)=-e^{1-x}+1 \Leftrightarrow h(x)=e^x-e \Leftrightarrow \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}\, dt = e^x - e$

Με παραγώγιση παίρνουμε: $\dfrac{\ln x - x}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$, $x \in (0,+\infty)$

Δ2. $\lim_{x\to 0^+}\left[(f(x))^2\,\eta\mu\frac{1}{f(x)} - f(x)\right] =$

$$= \lim_{u\to 0^-}\left[\frac{1}{u^2}\eta\mu u - \frac{1}{u}\right],\quad \text{θέτοντας}\ \ u = \frac{1}{f(x)}\ \ \text{με}\ u \to 0^-\ \text{καθώς}\ x \to 0^+$$

$$= \lim_{u\to 0^-}\left(\frac{\eta\mu^u}{u^2} - \frac{1}{u}\right)$$

$$= \lim_{u\to 0^-}\frac{\eta\mu u - u}{u^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D.L.H.}{=}} \lim_{u\to 0^-}\frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{2u} = \frac{1}{2}\lim_{u\to 0^-}\frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{u} = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

Δ3. Η F είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

$$F'(x) = f(x)\ \text{ και }\ F''(x) = f'(x) = \left(\frac{\ln x - x}{e^x}\right)' = \frac{\left(\frac{1}{x} - 1\right)e^x - (\ln x - x)\cdot e^x}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x} - 1 - \ln x + x}{e^x} = \frac{\frac{1}{x} + (x - 1 - \ln x)}{e^x} > 0$$

Άρα η F είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

- Η F είναι συνεχής στα $[x, 2x]$ και $[2x, 3x]$
- η F είναι συνεχής στα $(x, 2x)$ και $(2x, 3x)$

Με εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. για την F στα διαστήματα $[x, 2x]$ και $[2x, 3x]$ (έχουν νόημα αφού $x > 0$)

εξασφαλίζουμε $\xi_1 \in (x, 2x)$ και $\xi_2 \in (2x, 3x)$ ώστε να ισχύουν:

$$F'(\xi_1) = \frac{F(2x) - F(x)}{2x - x} = \frac{F(2x) - F(x)}{x}\ \text{ και }\ F'(\xi_2) = \frac{F(3x) - F(2x)}{3x - 2x} = \frac{F(3x) - F(2x)}{x}$$

Όμως F' γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και άρα :

$$\xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow F'(\xi_1) < F'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{F(2x) - F(x)}{x} < \frac{F(3x) - F(2x)}{x}$$

$$\overset{x>0}{\Longleftrightarrow} F(2x) - F(x) < F(3x) - F(2x) \Leftrightarrow F(3x) + F(x) > 2F(2x)$$

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $\Phi(x) = 2F(x) - F(\beta) - F(3\beta)$

- Φ συνεχής στο $[\beta, 2\beta]$
- $\Phi(\beta) = F(\beta) - F(3\beta) > 0$

  $\Phi(2\beta) = 2F(2\beta) - F(\beta) - F(3\beta) < 0$, από το ερώτημα Δ_3.

Όμως είναι: $F'(x) = f(x) < 0$ και άρα η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ και αφού $\beta < 3\beta \Leftrightarrow F(\beta) > F(3\beta)$

Σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει $\xi \in (\beta, 2\beta)$ ώστε να ισχύει:

$\Phi(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2F(\xi) = F(\beta) + F(3\beta)$

Επειδή: $\Phi'(x) = 2F'(x) = 2f(x) < 0$, η Φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε η λύση $x = \xi$ είναι μοναδική.

Επιμέλεια: Γιάννης Μερτίκας, Δημήτρης Βλάχος, Μάριος Παπαδιαμαντής, Ηρώ Μαρκάκη