

Απολυτήριες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής**, Ημ/νία: 17 Μαΐου 2010

Απαντήσεις Θεμάτων

Θέμα Α

A₁ Έστω $y_i = t_i - \bar{x}$ για $i = 1, \dots, v$ οι v παρατηρήσεις που κατασκευάζουμε.

Για τον αριθμητικό τους μέσο είναι :

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v y_i = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (t_i - \bar{x}) \\ &= \frac{1}{v} \left(\sum_{i=1}^v t_i - \sum_{i=1}^v \bar{x} \right) = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v t_i - \frac{1}{v} \cdot v \cdot \bar{x} \\ &= \bar{x} - \bar{x} = 0\end{aligned}$$

A₂ Ορισμός του σταθμικού μέσου, σελ. 87 του σχολικού βιβλίου.

A₃ Ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης θεωρείται ένα ενδεχόμενο που πραγματοποιείται πάντα και λέγεται βέβαιο ενδεχόμενο.

Το κενό σύνολο (\emptyset) είναι επίσης ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω το οποίο δεν πραγματοποιείται σε καμία εκτέλεση του πειράματος τύχης και ονομάζεται αδύνατο ενδεχόμενο.

- A₄** α) Σ
β) Λ
γ) Σ
δ) Λ
ε) Λ

(Σχόλιο : Η διατύπωση της πρότασης (γ) δεν είναι συντακτικά σωστή)

Θέμα Β

B₁ Η συνάρτηση f ορίζεται για τις τιμές $x \in \mathbb{R}$ οι οποίες ικανοποιούν τη συνθήκη :

$$x^2 - x + 1 \geq 0 \quad (1)$$

Είναι $\Delta = -3 < 0$, οπότε η (1) επαληθεύεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι: $A_f = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \neq 1$ είναι :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - 1}{x - 1} &= \frac{2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1 - 1}{x - 1} = \frac{2(\sqrt{x^2 - x + 1} - 1)}{x - 1} \\ &= \frac{2(\sqrt{x^2 - x + 1} - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} \\ &= \frac{2(x^2 - x + 1 - 1)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \frac{2x(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} \\ &= \frac{2x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1} \end{aligned}$$

Επομένως :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1} = \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{1 - 1 + 1} + 1} = 1$$

B₂ Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με :

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}} (x^2 - x + 1)' = \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο $K(0, f(0))$ είναι $\lambda = f'(0) = -1$.

B₃ Για τη γωνία ω της εφαπτόμενης ευθείας με τον άξονα $x'x$ ισχύει : $\varepsilon\varphi\omega = f'(0)$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi\frac{3\pi}{4}$$

Επειδή $\omega \in [0, \pi)$ είναι $\omega = \frac{3\pi}{4}$ (ή αλλιώς $\hat{\omega} = 135^\circ$)

Θέμα Γ

Γ1. Οι κλάσεις είναι της μορφής: $[0, c)$, $[c, 2c)$, $[2c, 3c)$ κ.λπ.

Επειδή $x_2 = 6$ είναι το κέντρο της δεύτερης κλάσης, ισχύει:

$$\frac{c + 2c}{2} = 6 \Leftrightarrow 3c = 12 \Leftrightarrow c = 4$$

Γ2.

	x_i	v_i	$x_i v_i$	x_i^2	$x_i^2 v_i$
[0,4)	2	20	40	4	80
[4,8)	6	40	240	36	1440
[8,12)	10	45	450	100	4500
[12,16)	14	30	420	196	5880
[16,20)	18	25	450	324	8100
Σύνολο		160	1600		20000

Για τη μέση τιμή (\bar{x}) του δείγματος είναι:

$$\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k x_i v_i = \frac{1}{160} \cdot 1600 = 10 \text{ (κιλά)}$$

Για τη διασπορά (s^2) του δείγματος είναι:

$$s^2 = \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{(\sum_{i=1}^k x_i v_i)^2}{v} \right] = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \left(\frac{1}{v} \sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2$$

$$= \frac{1}{160} \cdot \sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot v_i - (\bar{x})^2 = \frac{1}{160} \cdot 20000 - 100 = 25 \text{ (κιλά)}$$

Άρα η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{s^2} = 5$

Σχόλιο: Η διασπορά θα μπορούσε ισοδύναμα να υπολογιστεί και από τον τύπο:

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 v_i$$

Γ3. Ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{5}{10} = 50\%$$

Εφόσον $CV > 10\%$, το δείγμα είναι ανομοιογενές.

Γ4. Θεωρούμε ότι το πλήθος των ατόμων είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο σε κάθε κλάση.

Αν στο διάστημα $[7,8) \subseteq [4,8)$ βρίσκονται κ άτομα, τότε έχουμε:

$$\frac{8-7}{8-4} = \frac{\kappa}{v_2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{\kappa}{40} \Leftrightarrow \kappa = 10 \text{ άτομα}$$

Στο διάστημα $[8,12)$ βρίσκονται $v_3 = 45$ άτομα.

Αν στο διάστημα $[12,14] \subseteq [12,16)$ βρίσκονται λ άτομα, τότε έχουμε:

$$\frac{14-12}{16-12} = \frac{\lambda}{v_4} \Leftrightarrow \frac{2}{4} = \frac{\lambda}{30} \Leftrightarrow \lambda = 15 \text{ άτομα}$$

Συνολικά, στο διάστημα $[7,14]$ βρίσκονται: $10 + 45 + 15 = 70$ άτομα. Δηλαδή για το ενδεχόμενο A είναι: $N(A) = 70$. Επειδή κάθε άτομο έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί, για το ενδεχόμενο A από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{70}{160} = \frac{7}{16}$$

Θέμα Δ

Δ1. Η συνάρτηση ορίζεται και είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(P(A), +\infty)$ με:

$$f'(x) = \frac{1}{x - P(A)} - \frac{1}{2} \cdot 2(x - P(A)) = \frac{1}{x - P(A)} - x + P(A)$$

Θέτω:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x - P(A)} - x + P(A) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x - P(A)} = x - P(A) \Leftrightarrow (x - P(A))^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x - P(A) = 1, \text{ γιατί } x > P(A)$$

$$\text{Άρα: } x = P(A) + 1.$$

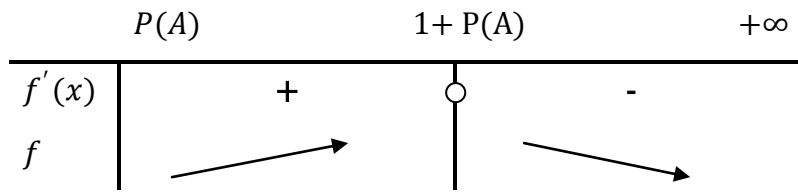
Επίσης θέτω:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x - P(A)} - x + P(A) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x - P(A)} > x - P(A)$$

$$\Leftrightarrow 1 > (x - P(A))^2, \text{ γιατί } x - P(A) > 0$$

$$\Leftrightarrow x - P(A) < 1 \Leftrightarrow x < 1 + P(A)$$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της f' και ακροτάτων:



Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(P(A), 1 + P(A)]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1 + P(A), +\infty)$ και παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 1 + P(A)$ το

$$f(x_0) = \ln(1 + P(A) - P(A)) - \frac{1}{2}(1 + P(A) - P(A))^2 + P(B) = P(B) - \frac{1}{2}$$

Δ2. Αφού η συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = \frac{5}{3}$ το $f(x_0) = 0$ είναι:

$$1 + P(A) = \frac{5}{3} \Leftrightarrow P(A) = \frac{2}{3}$$

$$\text{και } P(B) - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Επίσης είναι: } P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} = \frac{1}{3}$$

Δ3. Το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα A και B είναι το $(A \cap B)'$ με πιθανότητα: $P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Δ4. Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B είναι το

$(A - B) \cup (B - A)$ με πιθανότητα:

$$\begin{aligned} P[(A - B) \cup (B - A)] &= P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

διότι τα ενδεχόμενα $(A - B)$ και $(B - A)$ είναι ασυμβίβαστα.